

LP07 – DYNAMIQUE RELATIVISTE

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L3

Bibliographie

- ⚡ *Cours de Samtleben* Le dieu
- ⚡ *Introduction à la relativité* Langlois
- ⚡ *Relativité restreinte* Simon
- ⚡ *Mécanique I* BFR
- ⚡ *Relativité et invariance* Pérez

Prérequis

- Cinématique relativiste
- Quadri-vecteurs, calcul tensorielle, covariance et contravariance
- Maxwell
- Mécanique classique

Expériences

- ☞ Je voulais bien essayer de faire un accélérateur de particules avec mon four à micro-ondes mais ça n'a pas marché...

Table des matières

1	Vers un PFD Relativiste	2
1.1	Rappels : Pourquoi on cherche un PFD ?	2
1.2	Rappel : Transformation de Lorentz	2
1.3	Pseudonorme et métrique	3
1.4	Quadri-vecteur impulsion-énergie	3
1.5	Interprétation physique	4
1.6	Cas du photon	5
1.7	Quadri-vecteur force et PFD relativiste	5
2	Collisions de particules	5
2.1	Collision élastique : l'effet Compton	6
2.2	Collision inélastique	6
3	Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	8
3.1	Champ électrique uniforme et constant	8
3.2	Champ magnétique uniforme et constant	9
3.3	Accélérateurs de particules	10
3.4	L'oscillateur harmonique	10
4	Phénomènes relativistes	12
4.1	Effet Cherenkov	12
4.2	Retour sur Doppler	12

Introduction

Dans le cours précédent sur la cinématique relativiste, nous avons vu que la transformation de Lorentz était adaptée pour changer d'un référentiel galiléen à un autre en relativité restreinte. Maintenant, on va essayer de prendre en compte les forces pour trouver les lois fondamentales de la dynamique relativiste, en particulier une nouvelle formulation du principe fondamentale de la dynamique et du théorème de l'énergie cinétique. Elles doivent satisfaire deux conditions :

- être invariantes par transformation de Lorentz
- redonner les lois de la mécanique classique donc le cas $v \ll c$

Comment exprimer les lois fondamentales de la dynamique relativiste ? Comment permettent elles d'interpréter le mouvement de particules chargées dans un champ électrique et magnétique et les collisions entre particules ?

1 Vers un PFD Relativiste

1.1 Rappels : Pourquoi on cherche un PFD ?

Dans le cadre de la mécanique classique, on peut décrire le mouvement dynamique d'un objet à l'aide du PFD. On veut faire pareil en relat afin de pouvoir calculer comment bougent les particules rapides, et afin d'évaluer les écarts à la théorie classique.

On rappelle la notion de temps propre : $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

On note $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

β	0.01	0.1	0.5	0.99	0.9999
γ	1.0001	1.005	1.15	7.09	70.7

TABLE 1 – Variation de γ avec β .

On rappelle la définition du quadrivecteur position : $x^\mu = (ct, x, y, z)$

On rappelle la définition du quadrivecteur vitesse : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

1.2 Rappel : Transformation de Lorentz

On appelle *transformation de Lorentz* ou *boost de Lorentz* selon l'axe x la transformation permettant de passer d'un référentiel galiléen $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z, t)$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', x', y', z', t')$ en translation rectiligne uniforme selon l'axe x par rapport \mathcal{R} tout en satisfaisant l'**invariance de la vitesse de la lumière**. Cette transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

en introduisant le *facteur de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2)$$

On peut également écrire cette transformation directement :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad (3)$$

Remarquons que dans le cas où $v \ll c$, on a $\gamma \simeq 1$ et $\beta \ll 1$. On retrouve alors la transformation de Galilée

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad (4)$$

1.3 Pseudonorme et métrique

On nomme un vecteur x_{mu} , on signifie l'existence d'un produit scalaire via norme de Minkovsky comme suit : $x^\mu = \eta^\mu_\nu x_\nu$. On nomme pseudonorme d'un vecteur la quantité

$$\|x\|_{mink} = x^\mu x_\mu \quad (5)$$

1.4 Quadrivecteur impulsion-énergie

Pour définir un bon PFD, il nous faut une impulsion, puisque le *vrai* PFD c'est

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (6)$$

On va donc poser :

$$p^\mu = mu^\mu = (m\gamma c, m\gamma \vec{v}) \quad (7)$$

Si on analyse un peu cette chose on a bien une impulsion classique du côté spatial lorsque la vitesse est faible. Du côté temporel, on a :

$$p^0 = mc\gamma = mc \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (8)$$

Un DL à l'ordre 1 donne

$$p^0 c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (9)$$

Bam, énergie, et on nomme le premier terme *énergie de masse*, c'est l'énergie d'une particule au repos.

Monument de la physique :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \quad (10)$$

C'est l'équation la plus célèbre de la physique, qui exprime le fait que la masse de la particule constitue en soit une partie de son énergie totale. C'est un réservoir d'énergie potentielle : si une particule de masse m au repos est annihilée, on récupère (sous forme de chaleur par exemple) l'énergie \mathcal{E}_0 . Cette énergie ne varie pas (c'est un invariant relativiste) et en mécanique classique on l'ignore tout simplement car elle ne joue aucun rôle dans la description des phénomènes étudiés.

On définit l'énergie d'une particule \mathcal{E} par la partie temporelle de son quadrivecteur impulsion. Pour une particule de masse m on a :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 \quad (11)$$

Calculons la pseudo-norme de p :

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 = \mathcal{E}_0^2 \quad (12)$$

Ainsi lors d'un changement de référentiel inertiel, la pseudonorme du quadrivecteur impulsion est conservée, ce qui est cool ! La quantité conservée est l'énergie de masse, pas l'énergie, ni l'impulsion. On peut d'ailleurs calculer l'énergie comme suit :

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (13)$$

$$\mathcal{E}^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (14)$$

1.5 Interprétation physique

On a déterminé une expression pour l'impulsion et l'énergie en progressant par « prolongement » mais cela relève globalement d'une bonne dose d'intuition et de la volonté de conserver une forme connue pour les lois de la physique. Ces expressions ne sont valables que si elles rendent compte de la réalité et sont corroborées par l'expérience.

Poussons encore l'analyse de la partie spatiale de l'impulsion. En mécanique classique, la proportionnalité entre l'impulsion et la vitesse est l'inertie de l'objet. Elle représente la difficulté à lui transmettre de la vitesse et elle correspond à la masse de celui-ci. Si on procède de même en mécanique relativiste, alors l'inertie n'est pas simplement la masse, mais γm .

Remarque

Un certain nombre d'auteurs (dont Feynman) parlent de *masse relativiste* pour désigner le terme γm et on lit souvent que *la masse d'un objet relativiste augmente avec sa vitesse*. Cette dernière idée induit en erreur. La masse est une quantité qu'on définit par rapport à la quantité d'énergie qu'elle peut libérer lors d'une annihilation (au repos). Einstein considérerait qu'il s'agissait d'une mauvaise idée que de parler de *masse relativiste* et qu'il valait mieux se contenter de désigner m comme la masse associée à l'énergie de la particule au repos.

Quand $v \rightarrow c$ alors $\gamma \rightarrow +\infty$ et l'inertie de l'objet devient infinie. Cela signifie qu'il devient impossible pour un opérateur de communiquer à la particule une vitesse supérieure à celle qu'elle a déjà.

Il est impossible pour une particule massive d'atteindre la vitesse de la lumière dans le vide.

1.6 Cas du photon

Le photon se déplace à la vitesse de la lumière, ainsi il ne peut avoir une masse que de 0.

Le photon a une masse nulle.

On trouve alors

$$\mathcal{E} = |\vec{p}|c = \hbar c |\vec{k}| \quad (15)$$

Et finalement, pour un photon se propageant en direction \vec{e} :

$$p^\mu = \frac{h\nu}{C}(1, \vec{e}) \quad (16)$$

1.7 Quadrivecteur force et PFD relativiste

On veut $\frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$. Cela donne

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{d\mathcal{E}/c}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$F = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \vec{f} \right) \quad (18)$$

On remarque aussi que $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$.

On a donc

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (19)$$

Cependant l'accélération et la force ne sont plus collinéaires, puisque

$$\vec{f} = \gamma m \vec{a} + m \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} \quad (20)$$

2 Collisions de particules

✦ *Langlois*

On dit que deux particules entrent en collision lorsqu'elles subissent une variation de vitesse dans une zone quasi ponctuelle de l'espace et du temps. La collision est dite élastique si le nombre et la nature des particules sont conservés.

Hypothèse : Pendant la durée très brève d'un choc, le système pourra être considéré comme isolé. On a donc conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion.

2.1 Collision élastique : l'effet Compton

✦ Langlois p65

Le formalisme relativiste permet de traiter de la même façon les particules massives et les particules de masse nulle puisqu'on a vu dans la première partie qu'on peut définir une quadri-impulsion que la particule ait une masse ou non.

On considère la réaction $\gamma + e_{\text{immobile}}^- \rightarrow \gamma + e_{\text{mobile}}^-$, avec l'électron initialement au repos dans le référentiel du laboratoire. On note P_1 le quadri-vecteur énergie-impulsion du photon avant la collision, P_{e0} celui de l'électron avant la collision, P_2 celui du photon après la collision et P_e celui de l'électron après la collision.

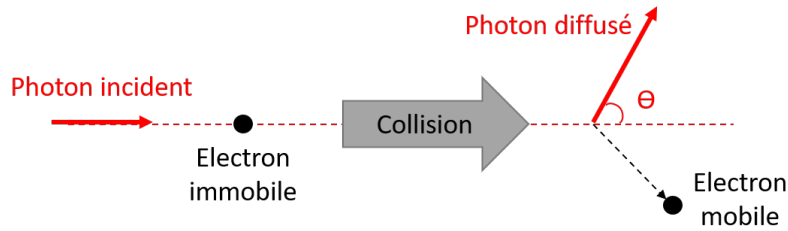


FIGURE 1 – Diffusion d'un photon par un électron initialement immobile.

La conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion donne alors

$$P_1 + P_{e0} = P_2 + P_e \quad (21)$$

$$\begin{cases} p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \\ \vec{p}_1 + \vec{0} = \vec{p}_2 + \vec{p}_e \end{cases} \iff \begin{cases} p_e^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2m_e c(p_1 - p_2) \\ p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) \end{cases} \quad (22)$$

On identifie les deux expressions de p_e^2 pour obtenir

$$\begin{aligned} p_1 p_2 (1 - \cos(\theta)) = m_e c (p_1 - p_2) &\iff \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} = \frac{m_e c}{1 - \cos(\theta)} \\ &\iff \frac{1}{\frac{p_2}{p_1} - 1} = \frac{m_e c}{1 - \cos(\theta)} \\ &\iff \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1 - \cos(\theta)}{m_e c} \end{aligned} \quad (23)$$

Or pour un photon, $p = \frac{h}{\lambda}$ donc finalement on obtient une différence de longueur d'onde donnée par :

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (24)$$

↓ *Quid des collisions inélastiques ?*



2.2 Collision inélastique

✦ Langlois p73-75

Les collisions inélastiques rentrent directement dans le cadre de la relativité restreinte qui les rend possibles grâce à l'équivalence masse-énergie.

C'est le principe de la fission nucléaire, où la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales, ce qui signifie que le défaut de masse correspond à de l'énergie, en l'occurrence l'énergie de liaison des nucléons, suivant la relation $\Delta\mathcal{E} = \Delta mc^2$ qui peut ensuite être récupérée et utilisée pour produire de l'énergie électrique (ODG : l'énergie de liaison moyenne rapportée à un nucléon est de l'ordre de 8 MeV).

À l'inverse, il existe un autre cas de collisions inélastiques pour lequel la somme des masses des particules initiales est inférieure à la somme des masses finales. Une telle collision peut se produire à condition de compenser le déficit de masse par un apport suffisant d'énergie cinétique (liée à la vitesse relative entre particules initiales).

On considère la collision entre 2 protons (observée dans les rayons cosmiques, reproduite de CERN) :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p} \quad (25)$$

Dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} , on suppose qu'un des protons est immobile et que l'autre a une vitesse associée à une énergie cinétique T . Le quadri-vecteur impulsion dans \mathcal{R} vaut donc :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(mc^2 + T + mc^2) \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (26)$$

avec m la masse d'un proton (et d'un antiproton).

L'expérimentateur peut uniquement jouer sur l'énergie cinétique T . On la nomme *énergie de seuil* de la réaction et c'est elle qu'il faut évaluer.

Pour cela, on se place dans le référentiel du centre de masse, noté \mathcal{R}_{CDM} . C'est le référentiel galiléen pour lequel l'impulsion totale est nulle (donc c'est la cas pour l'impulsion initiale comme finale par conservation de l'impulsion). On note \mathcal{E}_{CDM} l'énergie des particules dans \mathcal{R}_{CDM} . Le quadri-vecteur énergie-impulsion dans \mathcal{R}_{CDM} s'écrit alors :

$$P_{CDM} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_{CDM}}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (27)$$

L'énergie minimale à fournir est facile à déterminer dans \mathcal{R}_{CDM} et correspond à l'énergie qu'il faut pour former les particules finales et qu'elles soient au repos dans \mathcal{R}_{CDM} , on a donc :

$$\mathcal{E} \geq \sum_{\text{k particules finales}} m_k c^2 = 4mc^2 \quad \text{car toutes les masses sont identiques.} \quad (28)$$

En utilisant l'invariance de la pseudo-norme du quadri-vecteur impulsion, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{CDM}^2}{c^2} &= -p^2 + \frac{1}{c^2}(mc^2 + T + mc^2)^2 \\ &\Rightarrow -c^2 p^2 + (mc^2 + T + mc^2)^2 \geq (4mc^2)^2 \\ -c^2 p^2 + (mc^2 + T)^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 + m^2 c^4 &\geq (4m)^2 c^4 \\ -c^2 p^2 + m^2 c^4 + c^2 p^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 + m^2 c^4 &\geq (4m)^2 c^4 \\ -c^2 p^2 + 2m^4 c^4 + p^2 c^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 &\geq (4m)^2 c^4 \end{aligned} \quad (29)$$

en ayant utilisé l'invariant énergie-impulsion en passant de la 3ème à la 4ème ligne.

On trouve donc

$$T \geq \frac{(4m)^2 - 4m^2}{2m} c^2 = 6mc^2 \quad (30)$$

Application numérique

Avec $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg et $c = 2.99 \times 10^8$ m s⁻¹, on obtient

$$T \geq 5.6 \text{ GeV}$$

↓ Comment faire pour atteindre une telle énergie ?



3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

3.1 Champ électrique uniforme et constant

On considère une particule de masse m et de charge q , initialement immobile dans \mathcal{R} galiléen, soumise à un champ électrique \vec{E} uniforme et stationnaire (donc ne crée pas de champs \vec{B}).

La partie spatiale du PFD relativiste donne :

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \vec{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \quad (31)$$

On intègre cette équation pour obtenir $\vec{p} = qt\vec{E}$, et en projetant selon la direction de \vec{E} on obtient $p = qEt$.

Or on a vu que $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ donc on a

$$\begin{aligned} \gamma m v &= qEt \\ \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= qEt \\ \Rightarrow v &= \frac{\frac{qE}{m}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}t\right)^2}} \end{aligned} \quad (32)$$

On est dans la limite classique quand la particule n'a pas été accélérée à de trop grandes vitesses, donc quand $t \rightarrow 0$.

On retrouve donc bien le résultat classique $v = \frac{qE}{m}t$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v = c$ donc il existe une vitesse limite ! D'ailleurs, Bertozzi a expérimentalement vérifié cette vitesse limite en 1964.

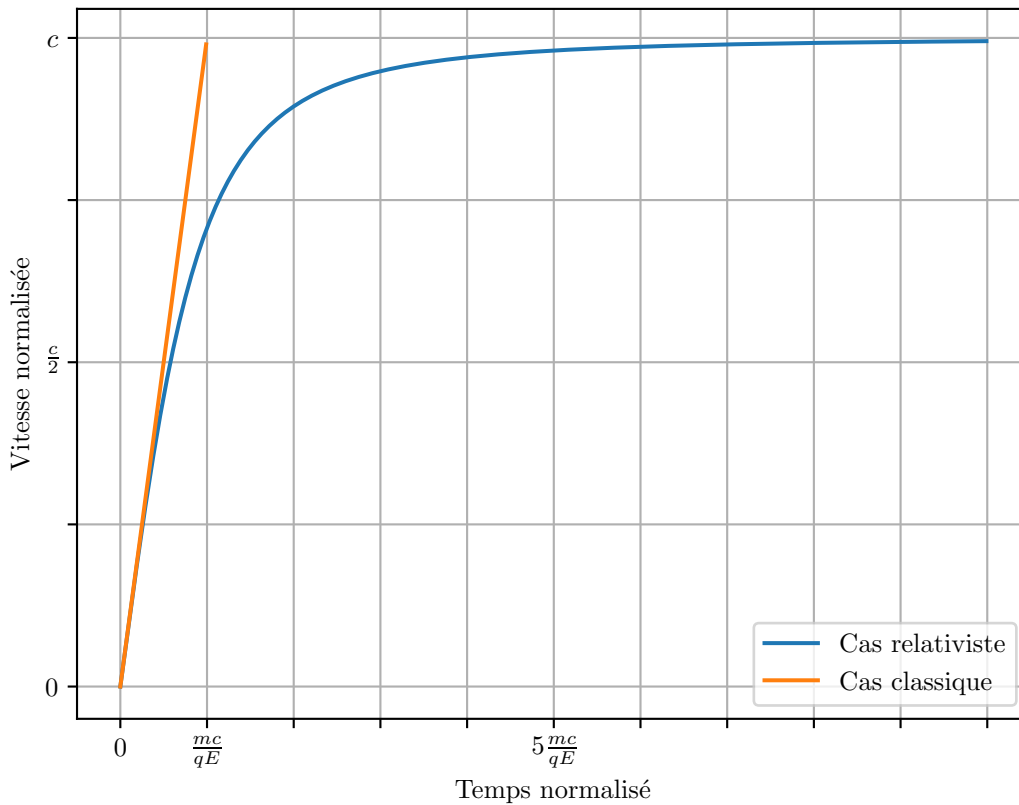


FIGURE 2 – Vitesse de la particule chargée en champs électrique uniforme constant en fonction du temps. On remarque l’existence d’une vitesse limite.

3.2 Champ magnétique uniforme et constant

On considère toujours une particule de masse m et de charge q , mais cette fois elle se déplace à la vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} galiléen et est soumis à un champ \vec{B} uniforme, stationnaire et orthogonal à la vitesse de la particule.

Puisque la force magnétique est orthogonale à la vitesse, elle ne travaille pas donc la particule est déviée sans être ralentie donc v est constante.

On regarde de nouveau la partie spatiale du PFD relativiste :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} &\Rightarrow \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_c \vec{v} \wedge \vec{u}_B &\quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m} \end{aligned} \tag{33}$$

où \vec{u}_B est le vecteur unitaire ayant le même sens que \vec{B} . On retrouve l’équation du cyclotron mais avec une pulsation relativiste $\omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$. On remarque d’ailleurs que $\lim_{\gamma \rightarrow 1} \omega_c = \frac{qB}{m}$: on retrouve la pulsation cyclotron classique !

On peut faire un accélérateur de particules en accélérant la particule avec \vec{E} et on maîtrisant sa trajectoire avec \vec{B} .



3.3 Accélérateurs de particules

- Cyclotron : on utilise un champ \vec{B} uniforme avec un champ \vec{E} oscillant pour accélérer la particule. Cependant, puisque ω_c dépend de la vitesse, on a un problème de désynchronisation du champ \vec{E} à des vitesses relativistes.
- Synchro-cyclotron : on ajoute un champ \vec{B} radial pour compenser γ lorsque l'orbite devient grande à de grandes vitesses, et la fréquence d'oscillation de \vec{E} est modifiable. Malheureusement, seule une petite partie des particules émises est capturée dans l'orbite stable.
- Synchrotron : la trajectoire est un cercle de rayon R fixe. On accélère la particule avec des champs \vec{E} constants et stationnaires, et on modifie \vec{B} pour que la particule reste sur la trajectoire circulaire. C'est le principe utilisé par le LHC.

Ordres de grandeur des énergies atteignables

- basses énergies : de 10 à 100 MeV ;
- moyennes énergies : de 100 à 1000 MeV ;
- hautes énergies : plus de 1 GeV et au delà du TeV (on atteint au LHC les 14 MeV).

3.4 L'oscillateur harmonique

On considère une particule de masse m au repos qui subit une force type ressort. On prendra son origine comme centre du repère.

$$F = -Kx\vec{e}_x \quad (34)$$

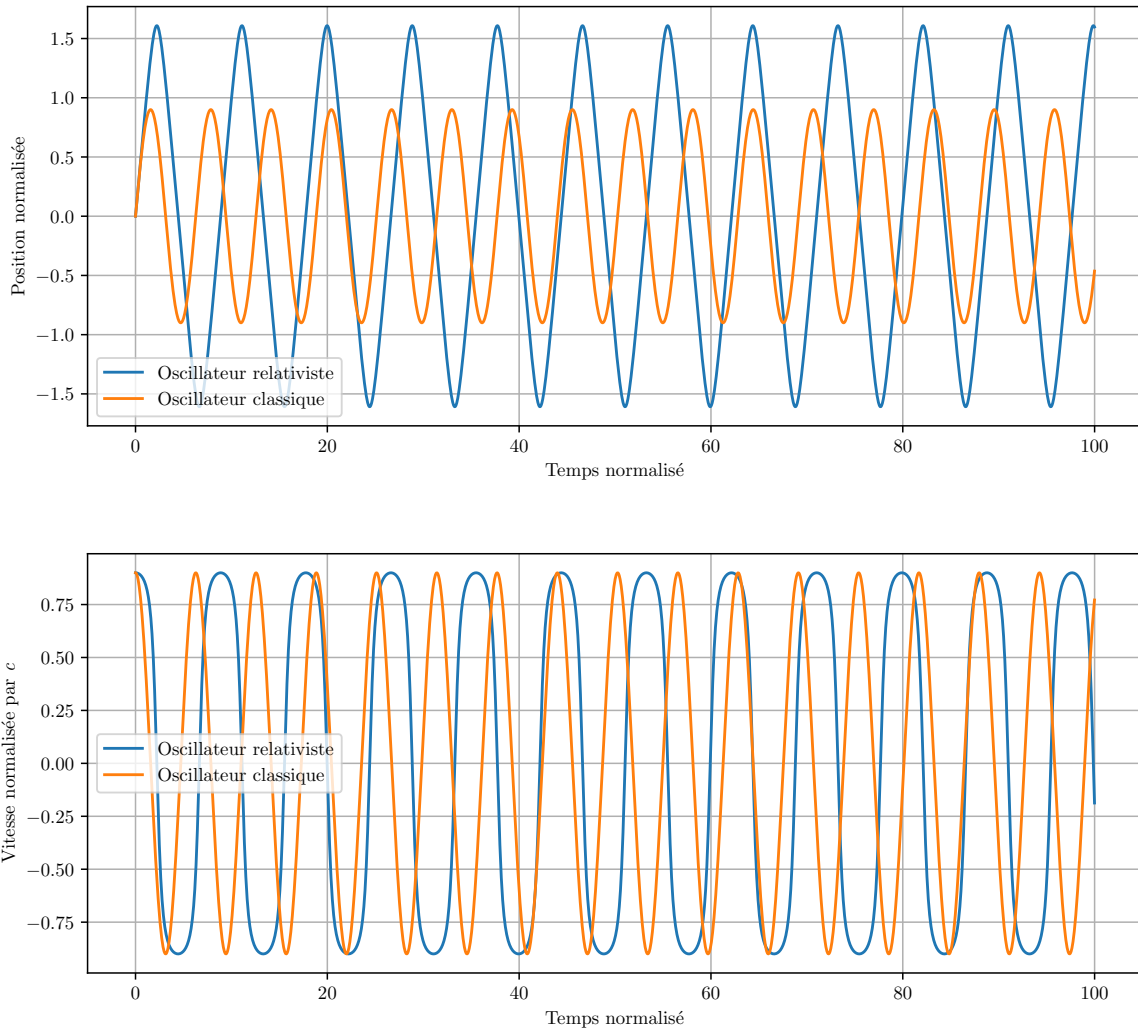
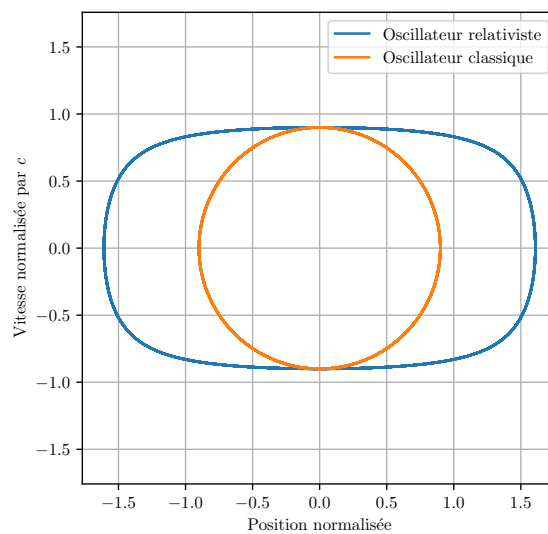
Or on a $\vec{f} = \gamma\ddot{\vec{x}} + m\dot{\vec{x}}\dot{\gamma}$ (cf équation 20). Le calcul projeté sur \vec{e}_x donne :

$$\dot{x}\dot{\gamma} = \gamma(\gamma^2 - 1)\ddot{x} \quad (35)$$

Ainsi on retrouve tout simplement :

$$-Kx = \gamma^3 m\ddot{x} \quad (36)$$

Cette équation est tout à fait cohérente avec le cas classique. La page suivante montre une résolution numérique réalisée à l'aide de l'outil ODEINT (RK4) dans le cas d'une vitesse initiale de $0.9c$.

FIGURE 3 – Position et vitesse des deux oscillateurs, classiques et quantiques, $v_0 = 0.9c$.FIGURE 4 – Portrait de phase des oscillations, $v_0 = 0.9c$.

4 Phénomènes relativistes

4.1 Effet Cherenkov

On va s'intéresser à l'effet Cherenkov qui est l'analogie du franchissement du mur du son, mais dans le cadre des ondes lumineuses. Autrement dit, il s'agirait de franchir un « mur de lumière ». Dans les milieux diélectriques parfaits et transparents, la vitesse de la lumière est différente de celle du vide :

$$c_0 = \frac{c}{n} \quad (37)$$

La quantité n , sans dimension, est l'indice du milieu. Il vaut 1 pour le vide, et il est supérieur à l'unité dans tous les autres milieux. Ainsi, dans certains milieux matériels rien n'interdit à certaines particules chargées (électrons de radioactivité β^-) de voyager à des vitesses supérieures à c_0 , sans toutefois contredire le principe suprême de la relativité qui impose que cette vitesse soit inférieure à c . C'est en ce sens qu'il peut se produire un « dépassement du mur de lumière ». Lorsque la particule chargée entre dans le milieu avec une vitesse $v > c_0$, il se produit une onde de choc analogue à l'effet qu'on connaît dans le domaine acoustique. La particule perd alors de l'énergie sous la forme d'un rayonnement lumineux.

Pour plus de détails, se référer à la leçon de 2016.

4.2 Retour sur Doppler

Pour plus de détails, se référer à la leçon de 2016.

Conclusion

Principe de relativité qui balai en justifiant ses limites de validité le modèle newtonien. De nouvelles quantités sont conservées, plus complexes, mais tout aussi élégantes.

Remarque, la 3eme loi de newton n'est plus conservée;) .