

Relativité Restreinte

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - x\beta) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Transformations de Lorentz (selon x) facteur de Lorentz

Relativité restreinte d'Einstein :

- Il existe des observateurs d'inertie qui sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapports aux autres
- Aucun objet ne peut avoir une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide c
 - Pas de simultanéité absolue

Métrique

g symétrique mais pas défini positif :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$ds = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \vec{dx}^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \text{ invariant relativiste}$$

Temps propre τ et référentiel propre

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \frac{dt^2}{\gamma^2} \text{ invariant}$$

Référentiel propre se déduit de \mathcal{O} par une transformation de Lorentz (dans son référentiel propre, la vitesse de la particule est nulle)

Transformations de Lorentz selon x

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformation inverse : $\beta \rightarrow -\beta$ et $\gamma \rightarrow +\gamma$

Quadrivecteurs et tenseurs

X^μ : coordonnées contravariantes

$X^0 = X_0$ (temps)

X_μ : coordonnées covariantes

$X^i = -X_i \quad i \in \{1,2,3\}$

$$X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu$$

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$$

Produit scalaire : $A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = A^0 A^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} = \partial_\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial X_\mu} = \partial^\mu$$

Contravariant : $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$

Covariant : $X'_\mu = X_\nu L^\nu_\mu$

$$\partial'_\mu = \partial_\nu L^\nu_\mu$$

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu$$

Quadrivecteur vitesse

Quadrivecteur position $X^\mu = (ct, \vec{X})$

$$\text{vitesse : } U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \quad U^\mu = \left(U^0, \gamma \frac{d\vec{X}}{dt} \right)$$

Dans le référentiel propre instantané d'une particule : $U^{*\mu} = (c, \vec{0})$

Loi de composition des vitesses

$$v'_\parallel = \frac{v_\parallel - v_e}{1 - \frac{v_\parallel v_e}{c^2}} \quad \vec{v}'_\perp = \vec{v}_\perp \frac{\sqrt{1 - v_e^2/c^2}}{1 - \frac{v_\parallel v_e}{c^2}}$$

Groupes de Lorentz et de Poincaré

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$$

$X^\mu \longrightarrow X'^\mu$ on veut $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX'^\mu dX'^\nu$ pour préserver la métrique plate

or $\eta_{\mu\nu} dX'^\mu dX'^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} dX^\rho dX^\sigma$ donc $\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$ (1)

- $\partial_\mu \partial_\nu X'^\sigma = 0$ (condition nécessaire)
- $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu$ où Λ^μ_ν et a^μ sont indépendants de X
 - $X'^\mu = X^\mu + a^\mu$: translation d'espace-temps, relation (1) satisfaite, préservation de la métrique plate
 - $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$: (1) $\Leftrightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \Leftrightarrow \eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda$
 Λ : 16 coefficients \hookrightarrow 10 équations donc 6 coefficients libres
 $\Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \det \Lambda = \pm 1$ (+1 pour le groupe de Lorentz propre)

Transformations infinitésimales

$$\Lambda = 1 + L \Rightarrow {}^t \Lambda \eta \Lambda = \eta + \eta L + {}^t L \eta + \mathcal{O}(L^2)$$

$$\eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda \Leftrightarrow \eta L + {}^t L \eta = 0 \quad M = \eta L = -{}^t L \eta = -{}^t M$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

\hookrightarrow boosts rotations

Exemple :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\psi & 0 & 0 \\ -\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^L = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & & \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_e = \cosh \psi \quad \gamma_e \beta_e = \sinh \psi \quad \beta_e = \tanh \psi$$

Correspond à une transformation de Lorentz pure suivant x : $\vec{\beta}_e = \tanh \psi \vec{e}_x$

$\Lambda(v'_e) \Lambda(v_e)$: Transformation de Lorentz associée à $\psi + \psi'$

Algèbre

J_i : Générateurs associés aux rotations

K_i : Générateurs associés aux boosts ($K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots$)

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \quad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \quad [J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k$$

Dynamique relativiste

$$m \frac{dU^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$$

F^μ doit vérifier $U^\mu F_\mu = 0$

Action de la particule relativiste libre de masse $\neq 0$

Particule évoluant entre M_1 et M_2 , sur un chemin paramétré par $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, longueur (dans l'espace-temps) :

$$S = -mc \int_{M_1}^{M_2} ds = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma$$

Paramétrisation possible par $\sigma'(\sigma)$: $S = -mc \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma'} \frac{dX^\nu}{d\sigma'}} d\sigma' \quad \frac{dX^\mu}{d\sigma'} = \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma'}$

Equation d'Euler-Lagrange et principe de moindre action

$$L = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX_\mu}{d\sigma}}$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dX^\alpha}{d\sigma} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dX_\alpha}{d\sigma} \right) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Remarques :

- m invariant relativiste, $m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}$ quadrivecteur
- paramètre σ quelconque, on pourrait utiliser X^0 , càd t ($X^0 = ct$) :

$$S = -mc \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Invariance par translation d'espace-temps

Longueur : évident qu'invariant
 $\delta X^\mu = \alpha^\mu$ avec α indépendant de σ

S ne dépend que de $\frac{dX^\mu}{d\sigma}$ avec $\delta \left(\frac{dX^\mu}{d\sigma} \right) = 0$

$\delta X^\mu = \alpha^\mu \quad X^0 = ct$ à un facteur c près
 α^0 : translation temporelle
 α^i : translation spatiale

Quantité conservée (Noether) :

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dX^\mu}{d\sigma} \right)} = -m \frac{dX^\mu}{d\tau} \quad P^\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

P^μ est associé à l'invariance par translation d'espace-temps

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$$

Newton : quantité conservée par translation potentielle = énergie $\Rightarrow E = P^0 c$

Quadri vecteur énergie-impulsion

Energie : $E = P^0 c \quad P^\mu = m U^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) \quad \text{donc} \quad E = \gamma mc^2$

En particulier, particule massive au repos ($\gamma = 1$) : $E^0 = mc^2$

Energie cinétique : $T = E - E^0 = (\gamma - 1)mc^2$

$$U^\mu U_\mu = c^2 \quad \Rightarrow \quad P^\mu = \left(P^0 = \frac{E}{c}, \vec{P} = \gamma m \vec{v} \right) \quad E^2 - \vec{P}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Quadri vecteur énergie-impulsion : $\vec{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{P} \right)$ suggère $E = \hbar \omega$ et $\vec{P} = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{\omega}{c} \vec{n}$

$$\vec{P} = \hbar \frac{\omega}{c} (1, \vec{n})$$

On a bien $P^\mu P_\mu = 0$ (photon = particule de masse nulle, donc vitesse c)

Collisions : Pas de conservation de la masse totale