

# Mécanique Analytique

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Equation d'Euler-Lagrange

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U$$

Lagrangien

## Notations :

Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Symbole de permutation (Levi-Civita) :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j, k \text{ direct} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ indirect} \\ 0 & \text{si } i = j \dots \end{cases}$$

Convention d'Einstein

Somme sur indices muets  
répétés

## Propriétés :

- Les équations d'EL sont covariantes (même écriture quel que soit le système de coordonnées)
- Deux Lagrangiens qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque mènent aux mêmes équations du mouvement :

$$L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{d}{dt} F(q_k, t)$$

- Les équations d'EL sont invariantes par le groupe de Galilée
- Les équations d'EL sont invariantes par transformation de jauge

## Groupe de Galilée :

- transformations de Galilée ( $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$  ;  $t' = t$ )
- transformation spatiales ( $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{d}$  ;  $t' = t$ )
- transformations temporelles ( $\vec{r}' = \vec{r}$  ;  $t' = t + \tau$ )
- Rotations ( $\vec{r}' = \overline{\text{Rot}} \vec{r}$  ;  $t' = t$ )

## Système soumis à des contraintes

### 1<sup>ère</sup> méthode :

- écrire le Lagrangien sans contraintes  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$
- éliminer autant de variables que possible grâce aux contraintes
- changer les coordonnées

### 2<sup>ème</sup> méthode :

- écrire le Lagrangien sans contraintes  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$
- écrire les contraintes sous la forme de fonctions qui s'annulent si la contrainte est vérifiée :  $f_n(q_k, t) = 0$
- $L'(q_k, \dot{q}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + \lambda_n f_n(q_k, t)$   $\lambda_n$  : multiplicateurs de Lagrange
- $L'$  est tel que les équations d'EL pour  $\lambda_n$  donnent les contraintes

# Principe variationnel

## Action

$$S[q] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t) dt$$

$S$  est une fonctionnelle, dépend des fonctions  $q_k(t)$  de même dimension que  $h$

La variation d'action au 1<sup>er</sup> ordre en  $\delta q_k$  autour de la trajectoire physique est nulle  $\forall \delta q_k(t)$  avec  $\delta q_k(t_1) = 0$  et  $\delta q_k(t_2) = 0$  :

$$S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta t] - S[q] = 0$$

## Variation de l'action

$$\delta S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \delta q_k(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right]_{t_2} \delta q_k(t_2) - \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right]_{t_1} \delta q_k(t_1)$$

$$q_k \rightarrow q_k + \delta q_k \quad \dot{q}_k \rightarrow \dot{q}_k + \frac{d}{dt}(\delta q_k) \quad \delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt}(\delta q_k)$$

$\delta S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta t] - S[q] = 0 \quad \forall \delta q_k(t)$  avec  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$  possible seulement si équations d'EL vérifiées

## Dérivée fonctionnelle

Dérivée de la fonctionnelle  $S[q]$

(dérivée d'une fonctionnelle = fonction)

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

$$\delta S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} \delta q_k(t) dt$$

avec  $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$

$$\text{principe variationnel} \Leftrightarrow \frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} = 0$$

## Méthode variationnelle :

- identifier le problème variationnel
- identifier la fonctionnelle
- faire analogie avec la mécanique
- écrire les équations d'EL correspondantes
- résoudre

## Principe variationnel et contraintes :

Contraintes holonomes :  $f_n(q_k, t) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} \delta q_k(t) dt$$

Problème : à cause des contraintes, les  $\delta q_k(t)$  ne sont pas tous indépendants  $\rightarrow$  il faut préserver  $\delta f_n(q_k, t) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} \delta q_k(t) = 0 \text{ mais } S \text{ stationnaire} \nRightarrow \frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} = 0$$

Il faut se ramener au cas simple où l'on doit trouver les extrema d'une fonction dépendant d'une variable réelle.

$$\overrightarrow{\text{grad}} s(\vec{x}_0) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{x}_0)$$

Pour une contrainte globale  $F[q] = 0$  :

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} = \lambda \frac{\delta F[q]}{\delta q_k(t)}$$

Autre manière :

$$f_n(q_k, t) = 0 \rightarrow \frac{\partial f_n}{\partial q_k} \delta q_k(t) = 0 \quad \frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)} = \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_k}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_k} \delta q_k(t) dt = 0$$

## Groupe continu de transformations (groupe de Lie)

$G$  est un groupe de Lie de dimension  $n$  si :

- $G$  est un groupe
- $\forall g \in G, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) / g = T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- $\forall g, g' \in G, \quad g = T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad g' = T(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$   
 $g \cdot g' \in G \quad g \cdot g' = T(\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \beta_i(\alpha_j, \alpha'_j) \text{ } (\beta_i \text{ fonction analytique})$   
 $g^{-1} \in G \quad g^{-1} = T(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad \gamma_i = (\alpha_j) \text{ } (\gamma_i \text{ fonction analytique})$

### Générateurs

Quasiment toute l'information est continue par les transformations infinitésimales (i.e. au voisinage de l'identité)

$$g(\varepsilon_i) = Id + \varepsilon_i \mathcal{S}_i$$

$\mathcal{S}_j$  : générateurs du groupe de Lie (forment une algèbre de Lie), nombre de générateurs = dimension du groupe

Propriétés :  $[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = c_{ijk} \mathcal{S}_k \quad c_{ijk}$  : constante de structure du groupe (= 0 pour les groupes abéliens)

### Transformation générale infinitésimale

$\varepsilon_\mu \quad \mu \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad \varepsilon_0$  : paramètre de transformation temporelle

$$\begin{cases} q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) \\ t' = t + \delta t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta q_i(t) = \varepsilon_\mu A_{i\mu}(q_j(t), t) \quad \delta t = \varepsilon_\mu B_\mu \quad A_{i0} = 0 \quad B_\mu = -\delta_{\mu 0}$$

### Condition suffisante pour la symétrie

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{d}{dt} F(q', t')$$

### Théorème de Noether

Si un système est invariant par un groupe continu de transformations de dimension  $n$ , alors il existe  $n$  quantités physiques qui sont des constantes du mouvement :

$$\frac{dQ_\mu}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad Q_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i\mu}(q) + \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) B_\mu + F_\mu$$

## Formulation Hamiltonienne

$$\begin{array}{ll} H(q_k, p_k, t) = p_k \dot{q}_k - L & p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \\ \text{Hamiltonien} & \text{Moment conjugué} \end{array}$$

On se limite au cas où  $p_k(q_l, \dot{q}_l, t)$  est inversible en  $\dot{q}_k(q_l, p_l, t)$ , et  $(p_k, q_l)$  indépendants

### Equations de Hamilton

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

### Crochets de Poisson

$$\begin{aligned} \{, \} : (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f, g &\mapsto \{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Propriétés :

- antisymétrie :  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- linéarité
- Leibniz :  $\{f \cdot g, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
- identité de Jacobi :  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$  (également satisfaite par le commutateur)

## Variables canoniquement conjuguées

$q_i$  et son moment conjugué  $p_i$  sont des variables canoniques :  $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$  et  $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$

## Quantités conservées

$$\text{Observable } A(q_k, p_k, t) \quad d_t A = \partial_t A + \{H, A\}$$

$$A \text{ conservé} \Leftrightarrow d_t A = 0 \Leftrightarrow \partial_t A + \{H, A\} = 0$$

Si  $A$  ne dépend pas explicitement du temps :  $\{H, A\} = 0$

## Théorème de Poisson

Si  $A, B$  sont deux quantités conservées telles que  $\partial_t A = \partial_t B = 0$ , alors  $\{A, B\}$  est aussi une quantité conservée (souvent,  $\{A, B\}$  n'est pas indépendant de  $A$  et de  $B$ ).

## Transformations canoniques

$$(q_i, p_i) \xrightarrow{T} (q'_i(q_j, p_j), p'_i(q_j, p_j))$$

$T$  est une transformation canonique si  $\{p'_i, p'_j\} = 0 = \{q'_i, q'_j\}$  et  $\{p'_i, q'_j\} = \delta_{ij}$

$$\Leftrightarrow \{f', g'\}(q'_i, q'_j, t) = \{f, g\}(q_i, p_i, t)$$

## Application à une observable $A$ ne dépendant pas explicitement du temps

$$d_t A = \{H, A\}$$

devient (pour  $H$  indépendant du temps) :

$$A(q_k, p_k, t) = A(t=0) + \int_0^t \{H, A\}(q_k, p_k, t') dt' = A(t=0) + \int_0^t \{H, A\}(q_k, p_k, t') dt' + \int_0^t dt' \int_0^{t'} \{H, \{H, A\}\} dt''$$

$$A(t) = A(0) + t\{H, A\}(0) + \frac{t^2}{2} \{H, \{H, A\}\}(0) + \dots$$

$$A(t) = A(t=0) \exp[t\{H, \cdot\}]$$

## Fonctions génératrices

Transformation canonique :  $(q_i, p_i, t) \rightarrow (q'_i(q_j, p_j, t), p'_i(q_j, p_j, t), t)$

$$S[q_i, p_i] = \int_{t_1}^{t_2} (p_i dq_i - H dt)$$

$$S'[q'_i, p'_i] = \int_{t_1}^{t_2} (p'_i dq'_i - H' dt)$$

Si transformation canonique, alors covariance générale sous cette transformation  $\forall H$

- équation de Hamilton pour  $(q_i, p_i, H) \Leftrightarrow$  équation de Hamilton pour  $(q'_i, p'_i, H')$
- $S[q_i, p_i] = S'[q'_i, p'_i] + F(t_2) - F(t_1)$
- $dF = p_i dq_i - p'_i dq'_i - (H - H') dt$
- $H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \partial_t F(q_i, q'_i, t)$

## Fonction génératrice $F(q_i, p'_i, t)$

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(q_j, p'_j, t) \quad q'_i = \frac{\partial F}{\partial p'_i}(q_j, p'_j, t)$$

$$H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \partial_t F(q_i, q'_i, t)$$

$F(q_i, p'_i, t) = p'_i q_i$  est l'identité

## Transformations canoniques infinitésimales

$$F(q_i, p'_i, t) = p'_i q_i - \varepsilon_n G_n(q_i, p'_i, t)$$

$$p_i = \partial_{q_i} F = p'_i - \varepsilon_n \partial_{q_i} G_n(q_j, p'_j, t) \approx p'_i - \varepsilon_n \partial_{q_i} G_n(q_j, p_j, t)$$

$$q'_i = \partial_{p'_i} F = q_i - \varepsilon_n \partial_{p'_i} G_n(q_j, p'_j, t) \approx q_i - \varepsilon_n \partial_{p_i} G_n(q_j, p_j, t)$$

$$p'_i \approx p_i + \varepsilon_n \partial_{q_i} G_n(q_j, p_j, t)$$

$$\delta p_i = -\varepsilon_n \{G_n, p_i\} \quad \delta q_i = -\varepsilon_n \{G_n, q_i\}$$

$$H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) - \varepsilon_n \partial_t G_n$$

### **Variation d'une observable A**

$$\delta A = A(q'_i, p'_i, t) - A(q_i, p_i, t) \approx -\varepsilon_n \{G_n, A\}$$

### **Symétries**

Un système mécanique est invariant par un groupe continu de transformations  $(q_i, p_i) \rightarrow (q'_i, p'_i)$  si les équations de Hamilton exprimées en termes des  $(q_i, p_i)$  sont invariantes :  $H'(q'_i, p'_i, t) = H(q'_i, p'_i, t)$

Critère suffisant pour la symétrie :  $\{G_n, H\} = \partial_t G_n$  (= 0 si  $G_n$  ne dépend pas explicitement du temps)

Réciproquement : si on a  $G_n(q_i, p_i)$  telle que  $\{G_n, H\} = 0$ , on a invariance par les transformées engendrées par  $G_n$  :

$$\delta A = -\varepsilon_n \{G_n, A\}$$

Théorème de Noether (hors transformations temporelles) :  $Q_n(q_i, \dot{q}_i, t) = -\partial_{\dot{q}_i} A_{in}(q_j) - F_n(q_i, t)$

$$G_n(q_i, p_i, t) \equiv Q_n(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j), t) = -p_i A_{in}(q_j) - F_n(q_i, t)$$

$$\delta q_i = -\varepsilon_n \{G_n, q_i\} = \varepsilon_n A_{in}(q_j)$$

### **Autres notations**

#### **Transformation :**

$$\begin{cases} t' = t + \varepsilon f(t) \\ \vec{q}' = \text{Id} + \varepsilon g(t) \vec{q} \\ S' = S + \varepsilon \int \frac{dF}{dt}(q, t) dt \end{cases} \quad \delta \vec{q} = g(t) \vec{q}$$

#### **Théorème de Noether :**

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\delta q - f(t) \dot{q}(t)) + f(t) L + F$$