LP07 — Dynamique relativiste

3 février 2016

Romain BERTHELARD & Paul EPRON

« Marty, il te faut penser en 4 dimensions ! »
DR. EMMET BROWN

Niveau : L3

Pré-requis

- Cinématique relativiste.
- Métrique de Minkowski, quadrivecteurs.
- Transformations de Lorentz.

Bibliographie

✍ *Relativité restreinte. Bases et applications* — C. Semay & B. Silvestre-Brac	Tout y est très bien fait, discussion physique et démarche intellectuelle de la construction de la théorie relativiste.
✍ *Introduction à la relativité restreinte* — J. Hladik & M. Chrysos	Très bien aussi pour comprendre comment marche la relativité. Il est complémentaire du précédent.
✍ *Mécanique - Tome 1* — R.Feynman	La relativité avec les mains.
✍ *Dictionnaire de la physique* — Taillet	Définitions diverses. Toujours très pratique.

Commentaires

Le jury rappelle qu'il faut souligner l'intérêt du formalisme quadrivectoriel. En outre, vu que les lois physique se complexifient un peu, il faut choisir ses exemples correctement pour ça ne devienne pas trop technique (et tout simplement imbuvable). On n'oubliera pas que les lois de conservation sont un outil qui sert notamment à la découverte de particules.

Table des matières

Introduction

La théorie de la relativité restreinte érige en postulat que les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel inertiel. De ce postulat découle l'invariance de la vitesse de la lumière dans les référentiels inertiels et les transformations de Lorentz qui permettent de passer d'un référentiel à l'autre et de conserver la même forme pour les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme (pour ne citer qu'elles).

Le formalisme des quadrivecteurs, qui s'inscrit dans la métrique de Minkowski, fournit les outils pour décrire la mécanique dans un cadre qui prolonge le formalisme euclidien auquel nous sommes habitués en mécanique classique. Ainsi ont été définis les quadrivecteurs position, vitesse et même l'accélération.

À présent, l'idée est de déterminer comment on formule les lois de la physique dans le cadre de la relativité restreinte. Les lois de Newton ne peuvent rendre compte du mouvement de particules relativistes. Comment déterminer les nouvelles lois qui gouvernent le mouvement et comment vérifie-t-on qu'elles sont valides ? Peut-on encore parler de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pour un système isolé ?

I Grandeurs dynamiques relativistes

✍ *Semay & Hladik*

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on va se mettre d'accord sur les notations et quelques définitions qui, bien que connues, seront utilisées par la suite.

Dans le cadre de ce cours, on note $\mathcal{R}$ un référentiel supposé inertiel dans lequel le système étudié évolue. Le **temps propre** associé au système se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ est donné par :

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dorénavant, on notera :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad\qquad \beta = \frac{v}{c}$$

le facteur de Lorentz associé à la particule mobile dans $\mathcal{R}$. C'est la valeur de ce facteur qui détermine globalement si on est dans un cadre relativiste ou non. Pour se donner une idée des vitesses à considérer, donnons quelques valeurs (tableau 1).

TABLEAU 1 – Quelques valeurs de γ en fonction de la vitesse réduite

β	0.01	0.1	0.5	0.99	0.9999
γ	1.0001	1.005	1.15	7.09	70.7

Bien sûr, tout dépend du degré de précision qui est exigé des prévisions qu'on réalise avec les calculs et de la durée de l'expérience, mais on peut considérer que la relativité n'a pas à être prise en compte avant d'atteindre des vitesses de l'ordre de $10^6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ environ [1].

On rappelle que la quadri-vitesse est définie à partir du quadrivecteur position x^μ de sorte que :

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma c, \gamma\vec{v})$$

I.1 Impulsion et énergie

En mécanique classique, le principe fondamental de la dynamique impose que :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

C'est assez naturellement qu'on va chercher à prolonger cette loi dans le domaine de la relativité restreinte. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer l'impulsion relativiste. Vu qu'on connaît déjà le quadrivecteur vitesse u^μ, il semble naturel de vouloir définir le quadrivecteur impulsion en prolongeant la définition qu'on avait en mécanique classique. On pose donc :

$$p^\mu \equiv m u^\mu$$

1. Ce qui est quand nettement plus rapide qu'un agrégatif fuyant l'épreuve C de la semaine ski, disons-le !

Explicitement, cela donne :

$$p^\mu = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})$$

Analysons la partie spatiale de ce quadrivecteur. Lorsque la vitesse du mobile est très faible ($v \ll c$) on a $\gamma \to 1$ et on retrouve l'expression classique de l'impulsion. De part cette constatation, la définition qu'on a faite du quadrivecteur semble faire de lui un bon candidat pour étendre la notion d'impulsion au cadre relativiste.

À présent regardons la partie temporelle et donnons-lui un sens physique. On a :

$$p^0 = mc\gamma = mc\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Effectuons un développement limité aux basses vitesses au premier ordre en v^2/c^2 :

$$p^0 \simeq mc\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

On multiplie par c des deux côtés et on obtient :

$$p^0 c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

On identifie immédiatement dans cette expression que le deuxième terme (à droite de l'équation) n'est autre que l'énergie cinétique classique !

Le premier terme dans le membre de droite a été interprété par Einstein comme l'énergie d'une particule au repos :

$$\boxed{E_0 = mc^2} \tag{1}$$

C'est l'équation la plus célèbre de la physique, qui exprime le fait que la masse de la particule constitue en soit une partie de son énergie totale. C'est un réservoir d'énergie potentielle : si une particule de masse m au repos est annihilée, on récupère (sous forme de chaleur par exemple) l'énergie E_0. **Cette énergie ne varie pas** (c'est un invariant relativiste) et en mécanique classique on l'ignore tout simplement car elle ne joue aucun rôle dans la description des phénomènes étudiés.

On définit l'énergie E d'une particule en l'identifiant (à un facteur près) à la partie temporelle du quadrivecteur impulsion p^0c. On a donc par définition pour une particule de masse m :

$$E = \gamma mc^2 \tag{2}$$

Vu le lien très étroit qui a été fait entre l'énergie et l'impulsion, on appellera désormais p^μ le quadrivecteur énergie-impulsion. Calculons maintenant sa pseudo norme :

$$p^\mu p_\mu = m^2 v^\mu v_\mu = m^2c^2$$

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant relativiste, car on reconnaît en fait l'expression de E_0^2, le carré de l'énergie au repos d'une particule de masse m. En conséquence, lors d'un changement de référentiel inertiel, la pseudo-norme de l'impulsion-énergie est conservée.

Lors d'un changement de référentiel inertiel, l'impulsion ou l'énergie peuvent toutes les deux changer, mais cela se fait de sorte que la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion soit conservée. Cette loi de conservation se substitue aux lois habituelles de conservation de l'énergie, de la masse et de l'impulsion (en l'absence de forces) en mécanique classique.

D'autre part, vu l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion on peut remplacer dans le premier membre en faisant directement intervenir l'énergie E :

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2$$

Remarque :
On prendra garde, dans cette expression, à bien avoir conscience que $\vec{p}$ est la partie spatiale du quadrivecteur impulsion (et non pas la quantité de mouvement classique).

On arrive à l'expression relativiste de l'énergie dans le cadre de la relativité restreinte :

$$\boxed{E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

I.2 Interprétation physique et vérifications expérimentales

On a déterminé une expression pour l'impulsion et l'énergie en progressant par « prolongement » mais cela relève globalement d'une bonne dose d'intuition et de la volonté de conserver une forme connue pour les lois de la physique. Ces expressions ne sont valables que si elles rendent compte de la réalité et sont corroborées par l'expérience.

Poussons encore l'analyse de la partie spatiale de l'impulsion. En mécanique classique, la proportionnalité entre l'impulsion et la vitesse est l'inertie de l'objet. Elle représente la difficulté à lui transmettre de la vitesse et elle correspond à la masse de celui-ci. Si on procède de même en mécanique relativiste, alors l'inertie n'est pas simplement la masse, mais γm.

> **Remarque :**
> Un certain nombre d'auteurs (dont Feynman) parlent de « masse relativiste » pour désigner le terme γm et on lit souvent que « la masse d'un objet relativiste augmente avec sa vitesse » . Cette dernière idée induit en erreur. La masse est une quantité qu'on définit par rapport à la quantité d'énergie qu'elle peut libérer lors d'une annihilation (au repos). Einstein considérait qu'il s'agissait d'une mauvaise idée que de parler de « masse relativiste » et qu'il valait mieux se contenter de désigner m comme la masse associée à l'énergie de la particule au repos.
> En définitive, ce ne sont que des noms qu'on donne aux choses, mais je fais le choix de parler d'inertie pour γm.

Quand $v \to c$ alors $\gamma \to +\infty$ et l'inertie de l'objet devient infinie. Cela signifie qu'il devient impossible pour un opérateur de communiquer à la particule une vitesse supérieure à celle qu'elle a déjà.

Il est impossible pour une particule massive d'atteindre la vitesse de la lumière dans le vide.

Pour vérifier expérimentalement l'accord de la formule de l'énergie avec la réalité, on a mesuré l'énergie que des particules relativistes libéraient en interagissant avec la matière. Typiquement, il s'agissait pour les premiers tests d'électrons accélérés à des vitesses proches de celle de la lumière et on mesurait leur énergie cinétique en mesurant l'augmentation de la température du calorimètre dans lequel ils perdaient leur vitesse (par interaction avec la matière). Les résultats expérimentaux montrent un excellent accord avec la formule (2) et ainsi tout le raisonnement qui a permis de construire le quadrivecteur énergie-impulsion est validé.

I.3 Cas du photon

Le photon est la particule qui transporte l'énergie lumineuse. Dans le vide, la lumière se déplace à la vitesse $c = 299792458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Or si on prend la définition (2) qu'on a donné de l'énergie, on s'attend à ce que l'énergie d'une particule massive qui se déplace à la vitesse c diverge. Ceci n'est physiquement pas viable. La conséquence est immédiate : **la masse du photon est nulle**.

On avait montré que l'énergie relativiste pouvait s'exprimer en fonction de l'impulsion et de la masse (3). Dans le cas du photon on se retrouve avec :

$$E = |\vec{p}|c$$

Dans le cas particulier du photon, on peut utiliser la relation de Planck qui relie l'énergie et le nombre d'onde :

$$E = \hbar c|\vec{k}|$$

On en déduit alors le quadrivecteur énergie-impulsion du photon :

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c}\vec{e}\right)} \tag{4}$$

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire qui donne la direction de propagation du photon.

Dans cette première partie, on vient de se donner les outils pour généraliser la mécanique. L'utilisation du formalisme des quadrivecteurs permet de construire l'impulsion relativiste, étroitement reliée à l'énergie. Il est légitime d'avoir recours à cette grandeur car :

- *on retrouve les résultats classiques lorsque la vitesse est petite devant c ;*
- *les résultats expérimentaux valident l'expression de l'énergie relativiste lorsque les particules ont des vitesses proches de c.*

On est donc en mesure de discuter de l'énergie d'une particule. À présent on va chercher à relier les causes du mouvement (les forces) à la trajectoire des particules en bâtissant le successeur du principe fondamental de la dynamique dans le cadre relativiste.

II La force et le principe fondamental en relativité

II.1 Principe de la dynamique relativiste

✍ *Hladik & Semay*

On a donc construit, en s'appuyant sur le puissant formalisme des quadrivecteurs, une quantité qui correspond bien à ce qu'on peut appeler une impulsion relativiste, adaptée au cadre dans lequel on travaille. Il faut maintenant relier une variation d'impulsion à une cause. On cherche à généraliser le concept de force. Là encore, on va s'appuyer sur les analogies avec la mécanique classique et poser une définition semblable.

Dans un référentiel inertiel, une force agissant sur une particule modifie son impulsion relativiste d'une quantité $\mathrm{d}\vec{p}$ pendant un temps $\mathrm{d}t$ selon la loi ;

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

On peut expliciter le terme de la dérivée. On trouve alors que la force s'exprime :

$$\boxed{\vec{F} = \gamma m\vec{a} + m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}} \tag{6}$$

Dans cette expression, $\vec{a}$ désigne l'accélération ordinaire dans $\mathcal{R}$. On constate donc que, dans le cas général, **la force et l'accélération ne sont plus colinéaire en relativité restreinte**.

Il est cependant instructif d'examiner deux cas particuliers.

II.2 Mouvement uniforme, le cyclotron

✍ *Hladik*

On va considérer une particule de charge q placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ uniforme. La particule va subir la force $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. La force magnétique ne travaille pas, donc l'énergie cinétique de la particule reste constante. Vu que $E_c = (\gamma - 1)mc^2$, on en déduit que v (le module de la vitesse) est une quantité constante. Dans ce cas, la relation (6) s'écrit simplement :

$$\vec{F} = \gamma m\vec{a}$$

On a alors des résultats proches de la mécanique newtonienne où il suffirait de remplacer m par γm.

Ce serait par exemple le cas d'une particule chargée placée dans un champ magnétique (seul !). On aurait alors :

$$\gamma m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ce qu'on peut réécrire en définissant la pulsation cyclotron :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \omega_c\left(\vec{v} \times \vec{e}_z\right) \qquad\qquad \omega_c = \frac{qB}{\gamma m}$$

Vu que γ est constant, la résolution est la même qu'en mécanique classique en ce qui concerne la suite du problème. La pulsation cyclotron est plus petite que dans le cas classique puisque $\gamma > 1$. C'est bien ce qui est constaté expérimentalement.

II.3 Mouvement rectiligne, l'oscillateur harmonique

✍ *Semay*

On considère une particule de charge de masse au repos m et qui subit une force proportionnelle à l'écart à sa position d'équilibre (qu'on va prendre comme origine du repère) :

$$\vec{F} = -Kx\vec{e}_x$$

Ceci n'est ni plus ni moins que l'oscillateur harmonique, que nous allons étudier dans le cas relativiste.

Dans l'expression (6) du principe de la dynamique relativiste, on a vu qu'apparaissait la dérivée temporelle de γ. Pour ce problème à une dimension où la vitesse et l'accélération sont colinéaires :

$$F = \gamma m\ddot{x} + m\dot{x}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

Le calcul montre que :

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\frac{\dot{x}^2}{c^2}\ddot{x} = \gamma(\gamma^2-1)\ddot{x}$$

et dans l'expression (6) de la force on se retrouve alors avec :

$$F = \gamma^3 m\ddot{x}$$

Remarque :
Physiquement parlant, la présence du facteur γ^3 indique qu'une particule présente une inertie bien plus grande pour changer de vitesse (en module) que pour changer de direction, puisque que dans le cas du mouvement uniforme circulaire, on avait seulement un facteur γ entre $\vec{F}$ et $m\vec{a}$. On peut retenir que l'inertie est plus grande dans la direction du mouvement qu'orthogonalement à celui-ci.

Déterminons maintenant les équations du mouvement. On utilise l'expression de la force élastique dans le nouveau principe de la dynamique et on obtient :

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

On vérifie au passage que cette équation du mouvement coïncide avec le cas classique si $\dot{x} \ll c$. Cette vérification systématique permet d'identifier quels sont les ajouts introduits par les considérations relativistes.

L'énergie de cette oscillateur est donnée par la somme de son énergie mécanique relativiste et de l'énergie potentielle due à la force de rappel :

$$E = \gamma mc^2 + \frac{Kx^2}{2}$$

Calculons sa dérivée temporelle pour voir si elle est encore conservée, par rapport au cas classique :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = mc^2\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{2}\dot{x}x$$

On explicite la dérivée de γ et on a alors :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\left(m\gamma^3\ddot{x} + Kx\right) = 0$$

par le principe de la dynamique relativiste. L'énergie est encore conservée pour l'oscillateur harmonique relativiste.

On a reconstruit un « principe fondamental » qui donne les équations du mouvement pour des particules relativistes. On renonce à la colinéarité de la force et l'accélération dans le cas général. Certains cas particulier permettent de mettre en évidence les effets relativistes sur l'inertie de la matière vis à vis de certains types de mouvement. Voyons à présent certains phénomènes dont la description nécessite de faire appel à la relativité restreinte.

III La description des phénomènes relativistes

III.1 Effet Cherenkov

III.1.1 Circonstances de l'effet Cherenkov

✍ *Hladik*

On va s'intéresser à l'effet Cherenkov qui est l'analogue du franchissement du mur du son, mais dans le cadre des ondes lumineuses. Autrement dit, il s'agirait de franchir un « mur de lumière ».

Dans les milieux diélectriques parfaits et transparents, la vitesse de la lumière est différente de celle du vide :

$$c_0 = \frac{c}{n} \tag{7}$$

La quantité n, sans dimension, est l'indice du milieu. Il vaut 1 pour le vide, et il est supérieur à l'unité dans tous les autres milieux. Ainsi, dans certains milieux matériels rien n'interdit à certaines particules chargées[2] de voyager à des vitesses supérieures à c_0, sans toutefois contredire le principe suprême de la relativité qui impose que cette vitesse soit inférieure à c. C'est en ce sens qu'il peut se produire un « dépassement du mur de lumière ».

Lorsque la particule chargée entre dans le milieux avec une vitesse $v > c_0$, il se produit une onde de choc analogue à l'effet qu'on connaît dans le domaine acoustique. La particule perd alors de l'énergie sous la forme d'un rayonnement lumineux.

III.1.2 Le cône de lumière

Schématisons la situation sur la figure 1.

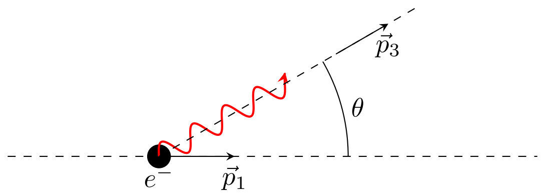

FIGURE 1 – Émission d'un photon par un électron du fait de l'effet Cherenkov

On note p_1^μ et p_2^μ les quadrivecteurs énergie-impulsion de l'électron avant et après l'apparition d'un photon, dont on notera le quadrivecteur énergie-impulsion p_3^μ. Les expressions auxquelles on a accès sont les suivantes :

$$p_1^\mu = (m_e \gamma c, m_e \gamma \vec{v}) \qquad\qquad p_3^\mu = \left(\frac{nh\nu}{c}, \frac{nh\nu}{c} \vec{e} \right)$$

Le principe de conservation du quadrivecteur énergie-impulsion est tel que :

$$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu$$

ce qui en écrivant le carré scalaire donne :

$$(p_1^\mu)^2 - 2p_1^\mu \cdot p_3^\mu + (p_3^\mu)^2 = (p_2^\mu)^2$$

Or l'énergie-impulsion de l'électron est un invariant relativiste. On doit nécessairement avoir :

$$(p_1^\mu)^2 = (p_2^\mu)^2 = m_e^2 c^2$$

On déduit alors que :

$$(p_3^\mu)^2 = 2p_1^\mu \cdot p_3^\mu$$

On remplace alors en utilisant la règle du pseudo-produit scalaire de l'espace de Minkowski et on a :

$$\left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 \left(1 - n^2\right) = 2m_e \gamma h\nu \left(1 - n\beta \cos\theta\right)$$

D'où l'angle sous lequel sont émis les photons Cherenkov :

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \left(1 + \frac{h\nu}{2m_e c^2} \frac{n^2 - 1}{\gamma} \right) \tag{8}$$

Ceci est le résultat exact.

Comme souvent en physique, on va évaluer les ordres de grandeur dans chaque terme pour voir si des simplifications sont possibles. L'expérience montre que la radiation Cherenkov est émise majoritairement dans le bleu. On va donc calculer, pour $\lambda = 450$ nm :

$$\frac{h}{m_e \lambda c} \simeq 2.7 \times 10^{-6} \ll 1$$

Reste à déterminer la valeur de l'autre terme. Si on considère que l'électron atteint la vitesse du « mur de lumière » alors on écrit que $\beta = 1/n$ et dans ces conditions :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

2. C'est le cas de certains électrons produits par radioactivité β^-

Dans ces conditions et tant que l'indice optique n reste proche de 1 on a aussi :

$$\frac{n^2-1}{\gamma} < 1$$

Par exemple, si on prend $\gamma = 1.33$ (pour l'eau) le terme alors $(n^2-1)/\gamma = 0.6$.
On peut donc simplifier l'expression (8) en se limitant au seul terme non négligeable :

$$\boxed{\cos\theta \simeq \frac{1}{\beta n}} \tag{9}$$

On utilise l'effet Cherenkov pour déterminer la vitesse des particules qui le produisent en mesurant l'angle θ et connaissant l'indice du milieu dans lequel ils voyagent. Cette technique est très efficace pour détecter les neutrinos dont les interactions avec la matière produisent les électrons susceptibles de produire la radiation Cherenkov. L'étude de cet effet a fallu le prix Nobel à Cherenkov, Tamm et Frank en 1958.

III.2 Effet Doppler relativiste

[3]

III.2.1 Rappel classique pour une onde mécanique

✍ *Taillet*

L'effet Doppler est un phénomène qui se produit lorsqu'une onde se propage et que la source ou l'émetteur sont en mouvement. La fréquence détectée par le récepteur est différente de celle envoyée par la source. Dans le cas d'ondes qui se déplacent un milieu matériel, il est nécessaire différencier les cas où la source ou le récepteur sont en mouvement par rapport au milieu, ils ne jouent pas des rôles symétriques. Dans le cas non relativiste, la fréquence perçue par le récepteur est donnée par :

$\nu = \nu_0 \dfrac{c+v_r}{c-v_e}$	ν_0 : fréquence émise par la source c : célérité de l'onde v_r : vitesse du récepteur v_e : vitesse de l'émetteur

Dans cette formule, v_e et v_r sont en fait les projections des vitesses sur l'axe joignant la source et le récepteur. Elles sont comptées positivement s'il y a rapprochement, négativement dans le cas contraire. Cet effet est purement longitudinal. Les composantes des vitesses qui sont orthogonales à l'axe source-récepteur ne contribuent en rien à l'effet Doppler.

Mais la formule qu'on vient de donner pour l'effet Doppler ne peut pas être valide pour des ondes lumineuses dans le vide (ou dans un milieu matériel classique comme l'air ou l'eau) car les vitesses impliquées sont relativistes. Si on fait des mesures avec un raisonnement classique, la théorie et l'expérience ne s'accorderont pas. On doit nécessairement faire appel à la relativité restreinte.

III.2.2 Correction relativiste

✍ *Semay*

Si on considère des ondes électromagnétiques comme (au hasard) la lumière, on doit impérativement se placer dans le cadre de la relativité. On va considérer deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ reliés par une transformation de Lorentz par une vitesse $\vec{V}$. Vu qu'on considère une onde qui se propage dans le vide et par le principe de relativité, il n'y a plus lieu de différencier les cas où le récepteur ou la source sont en mouvement, puisque la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels galiléens.

La situation qui nous intéresse est schématisée par la figure 2 :

On a précédemment donné le quadrivecteur énergie-impulsion du photon :

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \frac{E}{c}\vec{e}\right)$$

3. Je ne pense pas avoir le temps de le traiter. J'aimais bien cet exemple parce qu'on voyait apparaître un effet purement relativiste par rapport au cas classique.

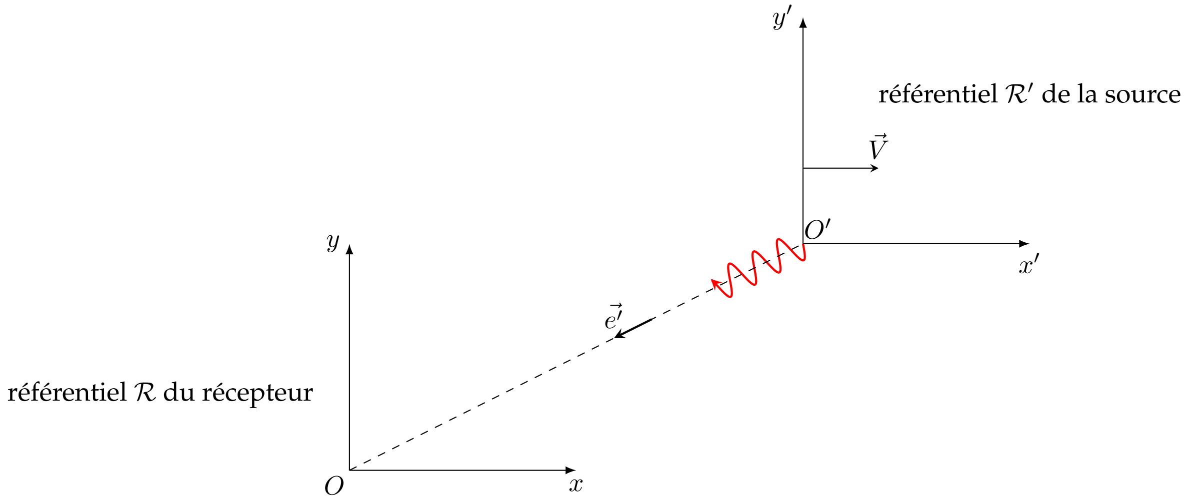

FIGURE 2 – Situation de l'effet Doppler-Fizeau

où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire qui indique la direction de propagation du photon. On notera d'ailleurs $\vec{e}_{\parallel}$ le vecteur unitaire parallèle à la vitesse $\vec{V}$ et $\vec{e}_{\perp}$ celui tel que $\vec{e}_{\perp} \cdot \vec{V} = 0$.

Le quadrivecteur énergie-impulsion se transforme avec les transformations de Lorentz d'un référentiel à un autre. Ainsi, dans le cas présent pour la composante temporelle :

$$\frac{E}{c} = \gamma \frac{E'}{c} + \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{p'} \qquad \Longrightarrow \qquad E = \gamma \left(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e'}\right) E'$$

On va considérer ici que la source est au repos dans le référentiel $\mathcal{R}'$ où elle émet un rayonnement de fréquence ν_S. Par la relation de Planck-Einstein qui associe l'énergie d'un rayonnement à sa fréquence, la fréquence reçue par un récepteur dans $\mathcal{R}$ vaut ν et est déduite des relations précédemment écrites :

$$\nu = \gamma \left(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{e'}\right) \nu_S \tag{10}$$

III.2.3 Cas longitudinal

Considérons le cas particulier où la direction du photon est alignée avec la vitesse de la source :

$$\vec{\beta} \cdot \vec{e'} = \beta$$

où la quantité β est alors comptée positivement ou négativement, selon si la source se rapproche ou s'éloigne du récepteur. Dans ce cas, la relation (10) devient :

$$\boxed{\nu = \nu_S \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \tag{11}$$

C'est la relation de **l'effet Doppler longitudinal**. Une analyse de la formule dans les différents cas possibles permet de mettre en évidence ce qu'on s'attend à observer pour une source lumineuse en déplacement. Les résultats sont donnés dans le tableau 2.

TABLEAU 2 – Effet Doppler-Fizeau

Mouvement relatif de la source	Signe de β	Conséquence sur la fréquence	Spectre lumineux
éloignement	$\beta < 0$	$\nu < \nu_S$	décalage vers le rouge
rapprochement	$\beta > 0$	$\nu > \nu_S$	décalage vers le bleu

L'effet Doppler-Fizeau est donc un outil qui permet de mettre en évidence le mouvement relatif d'un objet lumineux par rapport à un récepteur. En astrophysique, cet effet est très souvent utilisé pour détecter le mouvement des astres lointains.

III.2.4 Cas transversal

On considère maintenant le cas où la source et le récepteur sont disposés de sorte que $\vec{\beta} \perp \vec{e'}$. Dans le cas classique, il n'y a aucun effet Doppler détecté. Mais dans le cas relativiste, la relation (10) montre que :

$$\boxed{\nu = \gamma \nu_S} \tag{12}$$

On appelle cela **l'effet Doppler transversal** et cet effet est purement relativiste. Son existence a été vérifiée expérimentalement et montre là encore la grande efficacité de la relativité restreinte pour décrire des phénomènes impliquant des vitesses élevées (proches de c).

Conclusion

Le principe de relativité rend invalide la mécanique newtonienne dans des situations où les vitesses des particules sont élevées au sens où elles approchent de la vitesse de la lumière dans le vide. À l'aide du formalisme des quadrivecteurs et de la métrique de Minkowski, on reconstruit des quantités analogues à celles de la mécanique classique comme l'impulsion et l'énergie. Il apparaît cependant que ces dernière sont désormais couplées comme le sont l'espace et le temps, *via* les transformations de Lorentz. Aux principes de conservation de la masse, l'énergie et l'impulsion se substitue le principe de conservation de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion.

Cet édifice théorique, intellectuellement élégant puisque l'on cherche à prolonger des lois connues, s'avère très efficace. Il rend parfaitement compte des effets qui surviennent aux grandes vitesses. On dispose à présent d'un principe de la dynamique correct, et le principe de conservation de l'énergie-impulsion est très utile pour décrire certains effets relativistes.

Ce n'est pas évoqué dans la présente leçon, mais la dynamique relativiste est également l'outil de choix pour décrire les collisions et les désintégrations entre particules. On peut étudier des systèmes à n particules comme on le faisait en mécanique classique en définissant non pas un centre de masse mais un *centre d'inertie* (qui tient compte du fait que le photon, bien que sans masse, possède une inertie !). Là encore, l'expérience montre que la relativité est parfaitement valide et qu'il s'agit du cadre de travail naturel pour la physique des particules et bien souvent pour l'astrophysique.

Commentaires, questions, gribouillis