

Bibliographie

- ⚡ [FLTCLD] : M. FRUCHART, P. LIDON, E. THIBIERGE, M. CHAMPION, A. LE DIFFON, *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck (2016)

1 Écoulements rampants

L'écoulement d'un fluide est rampant si les effets inertiels sont négligeables devant les effets de la viscosité. La dynamique du fluide est régie par l'équation de Navier-Stokes qui se simplifie alors en régime stationnaire à l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

avec ρ la masse volumique du fluide et η sa viscosité.

1.1 Expérience de Stokes

- ⚡ [FLTCLD] p.411

On considère un écoulement incompressible de Couette cylindrique, c'est-à-dire l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres coaxiaux dont l'un est mis en rotation. En régime permanent, on peut montrer que l'écoulement est régi par l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = \eta \Delta \vec{v}$$

Cette équation est linéaire et invariante par renversement du temps. En inversant la vitesse de rotation du cylindre, il est alors possible de retrouver l'état initial du système.

Avec une seringue P104.29, injecter une petite goutte de glycérol coloré P75 dans le dispositif P106.17 contenant du glycérol. Il est préférable de mélanger préalablement le colorant avec du glycérol pour avoir une densité équivalente.

Mettre en rotation lentement le cylindre intérieur à l'aide de la manivelle, pour observer la tache de colorant se répartir dans le système et progressivement disparaître.

Tourner le cylindre dans l'autre sens avec le même nombre de tours pour voir la goutte de colorant se reformer et retrouver l'état initial du système.

À la fin de l'expérience, on peut observer que la goutte de colorant n'a pas exactement la même forme qu'à l'état initial. Cela est dû à la non-stationnarité de l'écoulement réalisé, ainsi qu'à la diffusion lente du colorant dans le milieu.

1.2 Viscosimètre à bille

- ⚡ [FLTCLD] p.411

1.2.1 Principe

Nous allons étudier la chute d'une bille sphérique de rayon r et de masse volumique ρ_b dans une éprouvette cylindrique de rayon R remplie d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ_f (voir figure 3.1).

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} + \vec{\pi} + \vec{F}$$

avec $\vec{\pi}$ la poussée d'Archimède et \vec{F} la force de frottement fluide.

On considère que l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds est petit devant 1, et que le régime stationnaire est atteint. Pour une chute dans un milieu infini, on modélise la force de frottement fluide par la formule de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$. Dans le cas d'une chute dans une éprouvette, la présence des parois n'est pas totalement négligeable car une recirculation du fluide apparaît. Il faut alors ajouter une correction à la formule de Stokes (voir [FLTCLD] p.438), que l'on exprimera :

$$\vec{F} = -6\pi\eta \frac{r}{1 - 2,1 \frac{r}{R}} \vec{v}$$

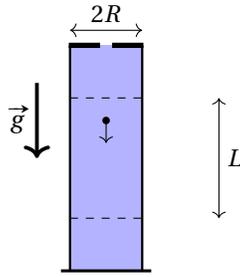


FIGURE 3.1 – Viscosimètre à bille.

Au final, la vitesse de la bille en régime permanent s'exprime :

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_b - \rho_f}{\eta} r^2 g \left(1 - 2,1 \frac{r}{R}\right)$$

Si la bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle, le régime permanent sera atteint au bout d'un temps :

$$\tau \approx \frac{2}{9} \frac{\rho_b}{\eta} r^2$$

Soit une distance caractéristique d'établissement du régime permanent de l'ordre de $v\tau \approx 1$ cm pour les billes utilisées.

Nous négligeons dans cette approche théorique l'influence du nombre de Reynolds et de la présence du fond du tube sur l'écoulement. Il est possible de les prendre en compte à travers différentes corrections de la formule de Stokes, nous vous conseillons la lecture de [FLTCLD] pour plus de détails.

1.2.2 Mesure de la vitesse de chute

Nous allons mesurer la vitesse de chute de billes en acier ($\rho_b \approx 7830 \text{ kg/m}^3$) de différents rayons r dans une huile de silicone. Il est préférable d'utiliser une huile de silicone plutôt que du glycérol, car celui-ci s'hydrate rapidement au contact de l'air ambiant, ce qui modifie sa viscosité.

L'éprouvette P105.44/2 de rayon $R = 3,2$ cm est remplie d'une huile Rotitherm M220 de viscosité cinématique $\nu \approx 1000 \text{ mm}^2/\text{s}$ et de masse volumique $\rho_f \approx 970 \text{ kg/m}^3$. Du papier millimétré est collé sur l'éprouvette afin de mesurer des distances verticales.

Laisser tomber une bille d'acier P106.37 de rayon $r = 0,5$ mm (que l'on mesurera préalablement à l'aide d'un Palmer P96) au centre de l'éprouvette P105.44/2, et mesurer la vitesse de chute v de la bille à l'aide d'un chronomètre P96.56. Afin de négliger l'établissement du régime permanent au début de la chute, et l'effet de la présence de la surface et du fond, on mesure le temps mis par la bille pour parcourir une dizaine de centimètres au milieu de sa chute dans l'éprouvette.

Recommencer l'expérience avec plusieurs billes de la même taille pour obtenir une statistique raisonnable, puis avec des billes de tailles r différentes (0,75 et 1,0 mm par exemple).

Représenter la vitesse de chute v en fonction du rayon des billes r , puis réaliser un ajustement de la forme $v = ar^2 - br^3$. Remonter à la valeur de la viscosité dynamique η à l'aide du coefficient a , et la comparer à la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho_f$ tabulée. Le rapport des coefficients b/a doit être proche de $2,1/R \approx 66 \text{ m}^{-1}$ pour valider notre modélisation de la correction de la formule de Stokes.

1.3 Écoulement de Poiseuille

↗ [FLTCLD] p.441

1.3.1 Rappel sur l'écoulement de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η dans un cylindre horizontal de diamètre $D = 2R$. On considère que l'écoulement est stationnaire et laminaire. La symétrie cylindrique impose une vitesse du fluide de la forme $\vec{v} = v(r) \vec{e}_x$, avec r la distance à l'axe central. Le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est alors identiquement nul, et l'équation se réduit donc à celle d'un écoulement rampant de la forme :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{v}$$

Sa résolution aboutit à un profil parabolique de la vitesse :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dP}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Le débit volumique Q_V à travers une section du cylindre est alors donné par la loi de Hagen-Poiseuille :

$$Q_V = -\frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{dP}{dx}$$

1.3.2 Application au dispositif expérimental

Nous allons réaliser un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de longueur L reliée à un vase de Mariotte rempli d'eau, comme représenté en figure 3.2.

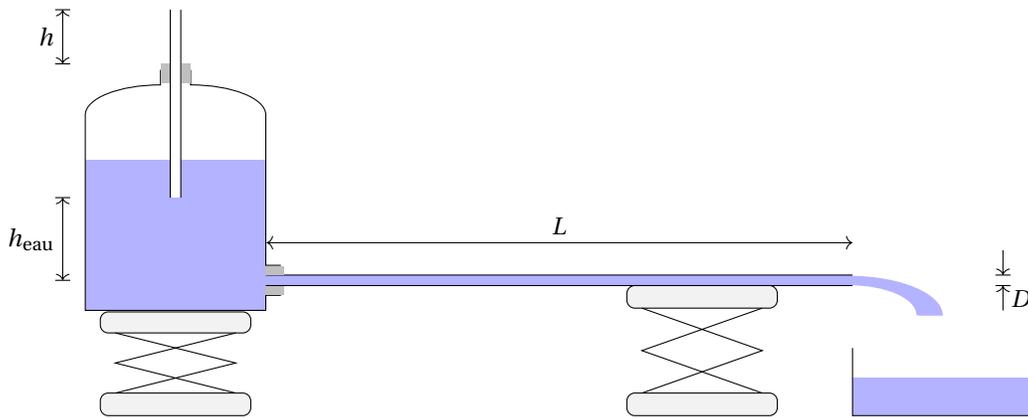


FIGURE 3.2 – Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique.

Un vase de Mariotte est un récipient fermé à l'intérieur duquel est inséré un tube en contact avec l'air libre. Par continuité de la pression, le bas du tube reste à la pression atmosphérique P_{atm} . Le gradient de pression résultant dans le fluide impose une pression au niveau du trou de vidange en bas du vase :

$$P = P_{\text{atm}} + \rho g h_{\text{eau}}$$

Au cours de la vidange, le niveau de l'eau dans le vase descend, mais la pression au niveau du trou de vidange reste la même tant que le bas du tube reste immergé, c'est l'intérêt du vase de Mariotte. De plus, il est assez simple de modifier la pression au niveau du trou car il suffit de monter ou de descendre le tube vertical.

Pour plus de détails sur le vase de Mariotte, nous vous conseillons la lecture de [FLTCLD] p.429.

Le profil de vitesse du fluide à l'entrée de la conduite n'est pas parabolique mais plutôt uniforme. L'établissement du régime de Poiseuille n'est obtenu qu'à partir d'une certaine distance d'écoulement, dépendant du nombre de Reynolds et du diamètre de la conduite (voir [FLTCLD] pour plus de détails). Nous considérons cependant pour la suite que cette longueur d'établissement est négligeable devant la longueur L de la conduite utilisée, le débit volumique s'exprime alors :

$$Q_V = \frac{\pi D^4}{128\eta} \frac{\rho g h_{\text{eau}}}{L}$$

1.3.3 Vérification de la loi de Poiseuille

Réaliser l'expérience présentée en figure 3.2 en utilisant le vase de Mariotte P105.37, dans lequel on insère au niveau du trou de vidange un capillaire en verre P105.37 de longueur $L = 1,36$ m et de diamètre intérieur $D = 2,0$ mm grâce à un bouchon troué. Utiliser des supports élévateurs P25 pour maintenir le tube horizontal sur toute sa longueur. Placer un cristallisoir sur une balance P97 pour recueillir l'eau à la sortie du tube et mesurer le débit. Déposer sur l'extrémité du tube un peu de suie à l'aide d'une allumette afin de la rendre hydrophobe, et d'éviter un « effet théière ». Remplir d'eau le vase de Mariotte en maintenant fermé l'extrémité de la conduite. Rajouter une tige en verre verticale dans le vase avec un bouchon troué afin de régler la pression hydrostatique.

Il est plus simple de mesurer la hauteur h de la tige qui dépasse du vase (comme indiqué en figure 3.2), plutôt que de mesurer la hauteur d'eau h_{eau} directement.

Pour différentes hauteurs h , laisse l'eau s'écouler une dizaine de secondes afin d'obtenir un régime permanent. Il est atteint lorsqu'il n'y a plus d'eau dans le tube vertical.

Mesurer le temps Δt nécessaire pour que s'écoule une masse Δm fixée (20 g par exemple) avec un chronomètre P96.56, puis en déduire le débit volumique $Q_V = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t}$.

Tracer le débit volumique Q_V en fonction de h (il n'est pas nécessaire de remonter à h_{eau}). Réaliser une régression affine de la forme $Q_V = a(h + h_0)$, puis remonter à la viscosité η de l'eau à l'aide du coefficient directeur.

La viscosité de l'eau évolue de façon importante avec la température (voir [FLTCLD] p.453 par exemple), mais on peut retenir la valeur tabulée $\eta(20^\circ\text{C}) = 1,0 \cdot 10^{-3}$ Pa.s. Le coefficient h_0 correspond principalement à la différence entre h et h_{eau} , mais il prend également en compte les éventuels effets de tension de surface à la sortie de la conduite.

Remarque : on pourrait également utiliser la balance Kern P97.21 pour réaliser un suivi de la masse d'eau écoulee au cours du temps avec le logiciel Kern.

Il est aussi possible de s'intéresser à l'effet de la longueur d'établissement sur le régime de Poiseuille en recommençant l'expérience pour différentes longueurs de tubes. Une étude est proposée dans [FLTCLD] p.451.

2 Écoulements parfaits à haut nombre de Reynolds

Un écoulement est dit parfait si les effets dus à la viscosité sont négligeables devant les effets inertiels.

2.1 Vidange d'un réservoir

➤ [FLTCLD] p.422

2.1.1 Description

Nous allons étudier la vidange d'un vase de Mariotte rempli d'eau afin de vérifier la loi de Torricelli. Le dispositif expérimental est présenté en figure 3.3.

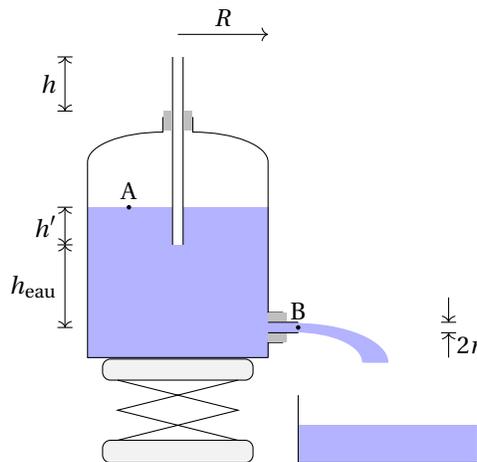


FIGURE 3.3 – Vidange d'un réservoir.

L'expérience est semblable à celle de l'écoulement de Poiseuille précédemment étudié, mais avec une conduite très courte. Le profil de vitesse parabolique n'a alors pas le temps de se développer, ce qui permet de considérer l'écoulement parfait.

En supposant de plus que l'écoulement est incompressible, irrotationnel et stationnaire, on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point A à la surface de l'eau dans le vase et un point B à la sortie du trou de vidange. On en déduit la relation :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

Or la pression au niveau du trou de vidange et celle en bas du tube immergé sont égales à la pression atmosphérique, on en déduit :

$$\begin{cases} P_A = P_{\text{atm}} - \rho g h' \\ P_B = P_{\text{atm}} \end{cases}$$

De plus, comme l'écoulement est incompressible, la conservation du débit impose :

$$v_A S = v_B s$$

avec $S = \pi R^2$ la section du vase et $s = \pi r^2$ celle du trou de vidange.

Au final, on peut donc exprimer la vitesse à la sortie du trou de vidange (attention il y a une erreur dans [FLTCLD]) :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gh_{\text{eau}}}{1 - (s/S)^2}}$$

En considérant que $s \ll S$, on retrouve la loi de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2gh_{\text{eau}}}$$

Le débit volumique de vidange dépend donc de la position du tube verticale dans le vase :

$$Q_V = s v_B = s \sqrt{2gh_{\text{eau}}}$$

2.1.2 Vérification de la loi de Torricelli

Le dispositif expérimental est similaire à celui de l'écoulement de Poiseuille, mais avec une conduite très courte en sortie.

Réaliser l'expérience présentée en figure 3.3 en utilisant le vase de Mariotte P105.37, dans lequel on insère au niveau du trou de vidange un tube très court (quelques cm). Placer un cristalliseur sur une balance P97 pour recueillir l'eau à la sortie du tube et mesurer le débit.

Mesurer avec précision le rayon R du vase et le rayon r du tube de vidange à l'aide d'un pied à coulisse P96.41.

Nous obtenons $R \approx 8,4$ cm et $r \approx 2,9$ mm.

Remplir d'eau le vase de Mariotte en maintenant fermé le trou de vidange. Placer une tige en verre verticale dans le vase avec un bouchon troué afin de régler la pression hydrostatique.

Comme précédemment, il est plus simple de mesurer la hauteur h du tube qui dépasse du vase, plutôt que de mesurer la hauteur d'eau h_{eau} directement.

Pour différentes hauteurs h , laisser l'eau s'écouler quelques secondes afin d'obtenir un régime permanent, puis mesurer le temps Δt nécessaire pour que s'écoule une masse Δm fixée (200 g par exemple), puis en déduire le débit volumique

$$Q_V = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t}.$$

Tracer Q_V^2 en fonction de h (il n'est pas nécessaire de remonter à h_{eau}). Réaliser une régression affine de la forme $Q_V^2 = a(h + h_0)$, puis remonter à l'accélération de la pesanteur g à l'aide du coefficient directeur.

L'ajustement affine permet de valider l'hypothèse d'écoulement parfait. Cependant, la valeur de g obtenue est souvent assez différente de la valeur attendue. La différence peut s'expliquer par l'incurvation des lignes de courant à l'entrée du tube de vidange qui provoque des zones de recirculation. Le champ de vitesse n'est alors plus homogène dans le tube. Il est possible de prendre en compte cet effet en modifiant la loi de Torricelli à l'aide d'un coefficient de débit (on se reportera à la lecture de [FLTCLD] p.428 pour plus de détails).

Le coefficient h_0 correspond principalement à la différence entre h et h_{eau} , mais il prend également en compte les effets de tension de surface au bout du tube immergé dans le vase de Mariotte. Une explication plus détaillée est proposée dans [FLTCLD] p.427.

2.2 Écoulement en soufflerie

↪ [FLTCLD] p.454

2.2.1 Description

Nous allons étudier l'écoulement produit par la soufflerie P0.20, qui permet d'atteindre des vitesses de plusieurs mètres par seconde, et par conséquent des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^3 à 10^4 .

L'air entre par la gauche de la soufflerie et traverse une grille, permettant d'obtenir un écoulement uniforme et laminaire, puis ressort par la droite.

La vitesse v de l'écoulement est mesurée à l'aide d'un anémomètre à fil chaud. Son principe repose sur l'asservissement en température d'un fil chauffé. Lorsque celui-ci se refroidit à cause de l'écoulement, la mesure de la tension qu'il faut lui fournir pour maintenir sa température constante permet alors de remonter à la vitesse, après avoir réalisé un étalonnage.

Un tube de Pitot est également présent dans la soufflerie, il est relié au manomètre fixé sur le support en bois. Il mesure la différence de pression ΔP entre un point d'arrêt du fluide (à l'avant du tube où la vitesse est nulle) et un point où la vitesse est égale à celle de l'écoulement v (sur les parois latérales du tube). En considérant l'écoulement parfait, stationnaire et incompressible, l'application du théorème de Bernoulli nous permet alors de relier la différence de pression et la vitesse de l'écoulement :

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} v^2$$

La différence de pression est mesurée en millimètre d'eau Δz sur le manomètre (même si celui-ci contient en réalité de l'alcool), d'où :

$$\Delta P = \rho_{\text{eau}} g \Delta z$$

Enfin, il est possible de placer différents objets dans l'écoulement et d'étudier la force de trainée qui s'exerce sur eux. On rappelle que la force de trainée s'exprime :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} S C_x v^2$$

avec C_x le coefficient de trainée de l'objet, qui dépend de sa géométrie et du nombre de Reynolds de l'écoulement, et S sa surface de référence, c'est-à-dire sa projection dans un plan orthogonal à l'écoulement.

La mesure de la force de trainée F_t est réalisée en compensant son moment avec la force de rappel F_r d'un ressort fixé sur la réglette noire. On note $d = 5,3$ cm la distance entre l'axe de rotation de la réglette et le ressort, et $D + d = 26,4$ cm la distance entre l'axe de rotation et l'objet, comme indiqué sur la figure 3.4.

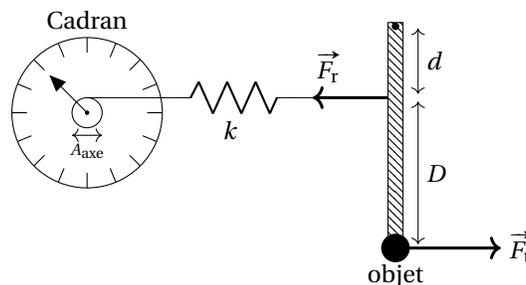


FIGURE 3.4 – Mesure de la force de trainée sur la soufflerie.

En tournant l'aiguille sur le cadran, on enroule un fil relié au ressort autour du disque de diamètre $A_{\text{axe}} = 3$ cm. Cela modifie l'élongation Δl du ressort, et donc la force $F_r = k \Delta l$ exercée par le ressort de raideur $k = 8,3$ N/m.

Lorsque la réglette est verticale, les moments des deux forces se compensent, on peut alors en déduire la force de trainée :

$$F_t = \frac{d}{D+d} F_r = \frac{d}{D+d} k \Delta l = \frac{d}{D+d} k \pi A_{\text{axe}} \frac{n - n_0}{40}$$

avec $n - n_0$ le nombre de graduations noires balayées par l'aiguille sur le cadran pour compenser les moments (un tour de cadran correspondant à 40 graduations).

2.2.2 Théorème de Bernoulli

Nous allons retrouver le théorème de Bernoulli en comparant la différence de pression donnée par le tube de Pitot à la vitesse de l'écoulement mesurée par l'anémomètre à fil chaud.

Retirer les objets présents dans la soufflerie et placer la grille à l'entrée. Insérer l'extrémité de la tige de l'anémomètre à fil chaud P96.46 au centre de l'écoulement à travers le cylindre en plastique. Il faut orienter le fil de manière à maximiser la circulation de l'air autour de lui.

Pour remonter à une mesure absolue de la vitesse, il serait nécessaire de régler le zéro du manomètre. Nous allons nous limiter à des mesures relatives dans notre cas.

Allumer la soufflerie en tournant la molette blanche. Pour différentes vitesses v d'écoulement, mesurées à l'aide de l'anémomètre, mesurer la différence de hauteur d'eau Δz du manomètre, et en déduire la différence de pression ΔP . Tracer ΔP en fonction de v^2 , puis réaliser une régression affine (l'ordonnée à l'origine provient du non-réglage du zéro). Remonter à la masse volumique ρ_{air} à l'aide du coefficient directeur.

La valeur tabulée de la masse volumique de l'air à 20°C vaut $\rho_{\text{air}} \approx 1,19 \text{ kg/m}^3$. L'écart observé avec la valeur expérimentale peut s'expliquer par la position du tube de Pitot qui se trouve dans le sillage de l'anémomètre, la vitesse mesurée est alors probablement plus faible que la vitesse réelle. La linéarité confirme cependant le théorème de Bernoulli.

2.2.3 Mesure d'un coefficient de trainée

Pour des nombres de Reynolds compris entre 10^3 et 10^5 , le coefficient de trainée C_x d'un objet est à peu près constant et indépendant du nombre de Reynolds. Nous allons le mesurer dans ces conditions.

Placer le disque de rayon 11,25 mm dans la soufflerie, perpendiculairement à l'écoulement, en vissant sa tige sur la règle noire à travers le trou sur le haut de la soufflerie. Décaler légèrement l'anémomètre si besoin, puis replacer la grille à l'entrée de la soufflerie.

La position de l'anémomètre par rapport à l'objet est délicate. Il ne doit pas être trop proche pour éviter de perturber le flux, mais suffisamment proche pour mesurer la vitesse de l'écoulement au niveau de l'objet.

Pour une vitesse nulle (soufflerie à l'arrêt), tourner l'aiguille sur le cadran jusqu'à trouver la position d'équilibre verticale de la règlette (la tige de l'objet ne doit toucher ni à droite ni à gauche) et noter la graduation noire n_0 correspondante. Vérifier que le fil relié au ressort s'enroule bien autour du disque de diamètre $A_{\text{axe}} = 3 \text{ cm}$.

Pour différentes vitesses v , mesurée à l'aide de l'anémomètre, ajuster la position de l'aiguille sur le cadran afin d'atteindre l'équilibre des moments. Repérer la graduation noire n correspondante, puis remonter à la force de trainée F_t avec la différence $n - n_0$.

Tracer F_t en fonction de v^2 , puis réaliser une régression linéaire afin de remonter au coefficient de trainée C_x .

Pour les vitesses considérées, le coefficient de trainée d'un disque vaut théoriquement $C_x \approx 1,17$.

Il est possible de mesurer de façon analogue les coefficients de trainée C_x de différents objets, plus ou moins profilés. Cette étude est réalisée dans [FLTCLD] p.463.

2.3 Pertes de charge (en seconde lecture)

✎ [FLTCLD] p.413

On considère un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et soumis à la gravité. La charge totale H du fluide est définie telle que :

$$H = \frac{P}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}$$

Cette grandeur, homogène à une longueur, est équivalente à la densité volumique d'énergie du fluide. Elle est donc conservée le long d'une ligne de courant d'après le théorème de Bernoulli. L'étude des pertes de charge d'un fluide dans une conduite, principalement dues à la viscosité ou à la géométrie de la conduite, est donc équivalente à une étude énergétique.

Une étude est proposée dans [FLTCLD] p.413 pour un écoulement de Poiseuille et pour mettre en évidence l'effet Venturi. Les expériences peuvent être réalisées à l'aide des tubes P106.27 et P106.28.

2.4 Autres expériences qualitatives (en seconde lecture)

✎ [FLTCLD] p.417

Diverses expériences qualitatives sont proposées dans [FLTCLD], nous vous conseillons de les réaliser. Il est possible en particulier d'illustrer l'effet Coanda à l'aide d'une balle de ping-pong sous un filet d'eau ([FLTCLD] p.417), ou de faire léviter une balle de ping-pong à l'aide d'un sèche-cheveux ([FLTCLD] p.419).