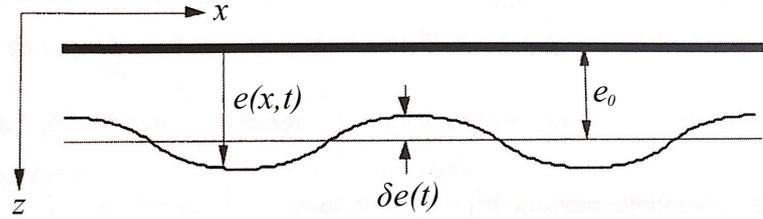
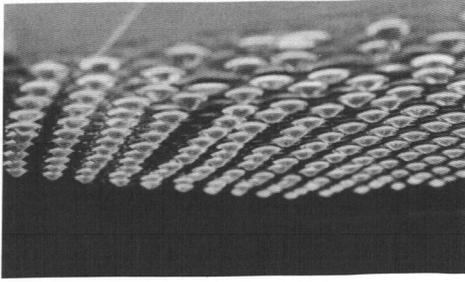


III) 2. Un cas dynamique : l'instabilité de Rayleigh-Taylor



L'instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR se développe quand une mince couche de fluide visqueux est déposée sous un substrat solide, le tout étant soumis à la gravité. Elle peut être observée sur la paroi intérieure haute d'un réfrigérateur ou sous le couvercle d'une casserole. Qualitativement, on comprend aisément que qu'une instabilité résulte de la compétition entre la gravité, qui tend à déformer les gouttes vers le bas à volume constant, et la tension de surface qui tend à minimiser la courbure des gouttes en aplissant le film. Pour simplifier, on suppose le problème invariant selon la direction Oy et on étudie le développement d'une perturbation sinusoidale de la forme :

$$e(x,t) = e_0 + \delta e(t) \cos(qx) \quad \text{avec} \quad q = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

1. Analyse statique :

Soit une portion de film de dimension λ suivant Ox et ℓ_y suivant Oy . La variation d'énergie associée à une perturbation à la surface de ce volume vaut :

$$\Delta E = \underbrace{- \int_0^\lambda \int_0^{e(x,t)} \rho g z \ell_y dx dz}_{\Delta E_{\text{pesanteur}}} + \underbrace{\int_0^\lambda \int_0^{e_0} \rho g z \ell_y dx dz}_{\Delta E_{\text{pesanteur}}} + \underbrace{\int_0^\lambda \gamma \ell_y (ds - dx)}_{\Delta E_{\text{surface}}}$$

En supposant des petites perturbations $\frac{\partial e}{\partial x} \ll 1$, on peut écrire $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} \simeq dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)^2\right)$. Ainsi :

$$\Delta E = - \int_0^\lambda \rho g \ell_y \left(\frac{e(x,t)^2}{2} - \frac{e_0^2}{2} \right) dx + \int_0^\lambda \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)^2 \ell_y dx$$

Puis, en remplaçant $e(x,t)$ par son expression (1) :

$$\Delta E = \frac{\gamma \lambda \ell_y}{4} \left(q^2 - \frac{\rho g}{\gamma} \right) \delta e^2$$

Les instabilités ne se développent que si $\Delta E < 0$, soit $q^2 < \frac{\rho g}{\gamma}$ ou encore $\lambda > 2\pi \ell_c$ avec $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ la longueur capillaire.

Ce raisonnement montre que la formation de gouttes devient stabilisante à partir d'une certaine longueur d'onde. Du moment que $\lambda > 2\pi \ell_c$, il y a donc une infinités de modes possibles. Mais alors quelle forme les gouttes vont-elles effectivement prendre ? Pour le savoir, nous devons réaliser une analyse dynamique pour trouver le mode prépondérant.

2. Analyse dynamique :

Ce problème peut-être traité dans le cadre de l'approximation de lubrification (vitesses verticales négligeables comparées aux vitesses horizontales, faible Re). Sous ces hypothèses, l'équation de NAVIER-STOKES s'intègre pour nous donner le champ de vitesse puis le débit volumique horizontal en fonction des forces volumiques qui s'exercent sur le fluide :

$$Q(x,t) = -\frac{1}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) e^3(x,t)$$

D'autre part, la conservation du volume s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

Or la pression dans le fluide s'écrit : $p(z) = p^\circ + \rho g(z - e_0) + \gamma/R$. Or on a négligé le gradient de pression hydrostatique, si bien que la pression est uniforme dans le fluide égale à celle de la surface : $p(z) = p(z = e) = p^\circ + \rho g(e - e_0) + \gamma/R$. En exprimant le rayon de courbure avec $\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$, on obtient :

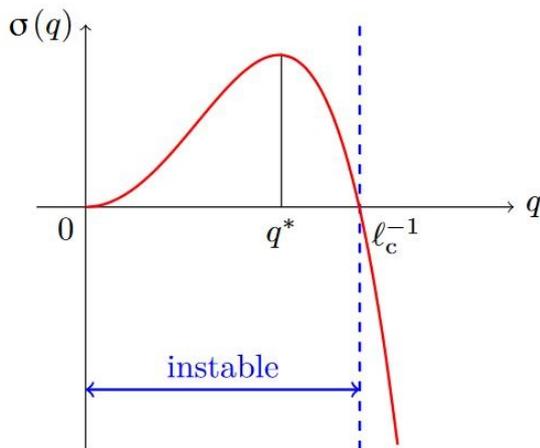
$$p = p^\circ + \rho g(e - e_0) - \gamma \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$$

En réinjectant dans (2) et en utilisant que $e(x,t) = e_0 + \delta e \cos(qx)$ on obtient finalement l'équation différentielle :

$$\frac{d\delta e}{dt} = \delta e \frac{e_0^3}{3\eta} q^2 (\rho g - \gamma q^2)$$

On recherche des solutions divergentes avec un taux de croissance σ : $\delta e(t) = \delta e_0 e^{\sigma t}$. La relation de dispersion est alors :

$$\sigma(q) = \frac{e_0^3}{3\eta} q^2 (\rho g - \gamma q^2) \quad (3)$$



- pour $q > 1/\lambda_c$, on a $\sigma < 0$. Cela signifie que les modes correspondants sont amortis, les gouttes ne se forment pas : on retrouve le résultat de l'analyse statique.
- pour $q < 1/\lambda_c$, σ admet un maximum qui correspond au mode de plus fort taux de croissance : c'est celui-ci qui se forme le plus vite. En pratique, c'est ce mode cinétiquement sélectionné qui s'instaure au détriment de tous les autres. Ce mode est obtenu pour :

$$q^* = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_c}$$

Ordre de grandeur :

Pour des gouttes d'eau dans un frigo ($T=5^\circ$) : $\gamma(T) = 75 \text{ mN.m}^{-1}$; $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

$$\rightarrow \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho g}} = 2,5 \text{ cm}$$

Conclusion

Ainsi qu'on l'a vu au cours de cette leçon, la création d'une interface n'est pas neutre du point de vue énergétique. Dans de nombreux problèmes, la minimisation de l'énergie de surface permet de traduire l'équilibre entre deux fluides en contact l'un avec l'autre. Nous avons compris en quoi la tension superficielle favorise l'existence de phases métastables, permettant ainsi d'observer des retards à la transition. Lorsqu'elle est en compétition avec d'autres forces qui tendent à déstabiliser la surface, la tension de surface fixe le seuil d'apparition de ces instabilités et régit leur développement. Sur ce principe, on aurait tout aussi bien pu mentionner l'instabilité de RAYLEIGH-PLATEAU ou encore l'effet MARANGONI. D'un point de vue pratique, la tension superficielle revêt une importance particulière dans les industries agro-alimentaire et cosmétique pour comprendre le comportement des mousses et des émulsions.