

# LP18 – PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

## Niveau : L2

### Commentaires du jury

- 2017 : La leçon ne peut se limiter à la présentation d'un unique phénomène de transport.
- 2016 : Les analogies et différences entre les phénomènes de transport doivent être soulignées tout en évitant de dresser un simple catalogue.
- 2015 : Les liens et les limites des analogies entre divers domaines doivent être connus.
- 2013 : [À propos du nouveau titre] Le candidat développera sa leçon à partir d'un exemple de son choix

### Bibliographie

- ♣ *Thermodynamique*, **Diu, Guthmann, Lederer, Roulet** →
- ♣ *Physique MP-PT Cap prépa*, **Renvoizé** → Bilan thermique
- ♣ *Thermodynamique PC-PSI, Précis Bréal*, **Choimet** →
- ♣ *Physique des électrons dans les solides. Tome 1.*, **Alloul** → Modèle microscopique
- ♣ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit** → Comparaison des phénomènes de transport
- ♣ *Physique PC, j'intègre*, **Sanz, Vandenbrouck, Salamoto, Chardon** →

### Prérequis

- Thermodynamique à l'équilibre
- Bases de mécanique des fluides
- Modèle de Drude
- Gaz parfait

### Expériences

- ♣ Piquer le montage MP34 – Phénomènes de transport

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Transport d'une grandeur conservée</b>	<b>2</b>
1.1	Cadre d'étude . . . . .	2
1.2	Équation de conservation locale . . . . .	3
1.3	Types de transport . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Diffusion</b>	<b>5</b>
2.1	Phénoménologie . . . . .	5
2.2	Exemple d'une approche microscopique : cas de la loi de Wiedemann-Franz/Fourier . . . . .	6
2.3	Équation de diffusion . . . . .	7
2.4	Propriétés de l'équation de diffusion . . . . .	8
2.4.1	Linéarité . . . . .	8
2.5	L'expérience de Jean-Perrin . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Autres détails</b>	<b>9</b>
3.1	Advection . . . . .	9
3.2	Nombre caractéristiques (Péclet, Reynolds) . . . . .	10
3.3	Couche limite . . . . .	10
3.4	Application au double vitrage : . . . . .	11
3.5	Double diffusion . . . . .	13

## Introduction

La thermodynamique est une discipline dans laquelle la notion de temps est réduite à la notion d'état initial et d'état final. Elle ne donne pas d'informations sur la **dynamique** des processus **hors-équilibre** amenant le système jusqu'à cet état final. Par exemple, la thermodynamique décrit l'état final d'un système en contact avec un thermostat mais ne décrit pas du tout comment se font les échanges d'énergie entre le système et le thermostat.

On définit ainsi un **phénomène de transport** comme le déplacement spatial d'une quantité physique. De nombreux exemples de la vie courante illustrent cette définition, comme la diffusion du sirop dans un verre d'eau, la conduction électrique dans un métal, le rayonnement du Soleil qui nous réchauffe ou encore les mouvements des masses d'air dans l'atmosphère.

## 1 Transport d'une grandeur conservée

### 1.1 Cadre d'étude

Quand on regarde un bulletin météo à la TV, on voit des cartes de température et de pression. Cependant, la thermodynamique nous enseigne que ces grandeurs ne sont définies qu'à l'équilibre. Afin de pouvoir les définir localement en régime transitoire, il faut donc introduire une hypothèse fondamentale dans cette leçon : **l'équilibre thermodynamique local**.

On définit un sous-système de taille  $d$  **mésoscopique**, un sous-système tel que  $\ell \gg d \gg L$  avec  $\ell$  le libre-parcours moyen et  $L$  la dimension macroscopique du système.

L'hypothèse **d'équilibre thermodynamique locale** suppose que tous les sous-systèmes mésoscopiques sont à l'équilibre thermodynamique.

Cette hypothèse permet donc de définir **localement** en tout point d'un système une température, une pression, une concentration... Cette hypothèse implique

- que le temps de rétablissement de l'équilibre du système  $\tau_{\text{relax}}$  soit négligeable devant les temps de transport des grandeurs  $\tau_{\text{évolution}}$  :

$$\tau_{\text{évolution}} \gg \tau_{\text{relax}}$$

- que l'échelle spatiale de variation des grandeurs  $l_{\text{évolution}}$  soit grande devant le libre-parcours moyen  $\ell$  :

$$l_{\text{évolution}} \gg \ell$$

#### Ordres de grandeurs

Pour un GP dans les conditions normales de température et de pression,  $\tau_{\text{relax}} \simeq 10^{-9}$  s et  $\ell \simeq 68$  nm.

Pour un métal,  $\tau_{\text{relax}} \simeq 10^{-14}$  s et  $\ell \simeq 10$  nm.

Ces conditions sont en général bien vérifiées pour les phénomènes de transport de la vie quotidienne tant que les milieux ne sont pas trop dilués (sinon  $\ell$  est du même ordre de grandeur que la taille du système).

Dans cette leçon, nous nous intéresserons à l'évolution d'un type de grandeur spécifique : les **grandeurs conservées**.

Une **grandeur conservée** est une grandeur extensive constante pour un système isolé. Sa variation dans une région de l'espace implique la présence d'un phénomène de transport.

Par exemple, la masse, l'énergie, ou encore la charge électrique sont des grandeurs conservées. L'avantage d'étudier des quantités conservées réside dans le fait qu'elles ne sont pas modifiées par les collisions microscopiques puisque ces collisions préservent le nombre de particule, leur énergie, leur charge... L'équilibre global ne peut être atteint que par transport d'une quantité conservée, d'un point à un autre. L'équilibre d'une quantité qui n'est pas conservée peut être rétabli localement par des collisions, sans nécessité de transport. Les phénomènes que nous étudierons concernent ainsi le transport de grandeurs conservées, comme par exemple la diffusion de matière (de particules), le transfert d'énergie ou diffusion de la chaleur, le transfert de charges électriques...

## 1.2 Équation de conservation locale

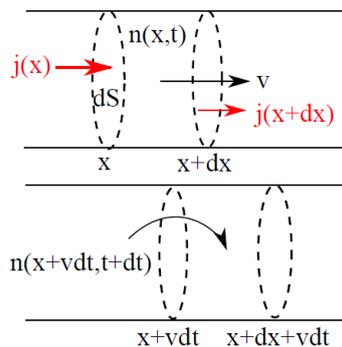
Pour établir l'équation de conservation locale, on va raisonner sur le nombre de particules dans un milieu chimiquement inerte. Ce raisonnement pourrait très bien être mené sur l'énergie ou sur la charges des particules. Prenons un système de volume  $V$  et de surface  $\Sigma$ . On a besoin, pour établir l'équation de conservation locale de particules dans ce système, de quantifier le flux algébrique  $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$  de particules sortant de  $V$ . Pour cela, on définit le **vecteur densité de courant**  $\vec{j}_n$  qui correspond au flux de particules par unité de surface et de temps et qu'on relie à  $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$  par l'expression :

$$\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_n \cdot \vec{dS} \quad (1)$$

### Remarques

- Cette définition montre que  $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}}$  est algébrique puisque la direction de  $\vec{dS}$  est par convention sortant de  $V$ . Ainsi, si  $\vec{j}_n$  est dans le même sens que  $\vec{dS}$ , on a bien un flux sortant de particules et  $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} > 0$ .
- On comprend aisément que si  $\vec{j}_n \perp \vec{dS}$ , alors  $\Phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} = 0$ .
- Cette définition permet de définir un vecteur densité de courant de particule, mais elle permet de façon analogue de définir un vecteur densité de courant d'énergie ou de charge (bien sûr les unités changent).

on peut maintenant travailler à établir l'équation de conservation locale. Pour cela, on se place dans un cas à 1 dimension afin de simplifier les calculs. On écrit alors  $\vec{j}_n = j \vec{e}_x$ .



Considérons un volume  $dV$  compris entre  $x$  et  $x + dx$  et de section  $S$ . Notons  $dN(x, t) = n(x, t)dV$  le nombre de particules en  $x$  que contient le volume  $dV$  à l'instant  $t$ , avec  $n(x, t)$  la densité particulaire. On suppose qu'il n'y a ni création, ni destruction de particules dans ce volume. Finalement, on note  $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$  la vitesse *uniforme* à laquelle se déplace le milieu. On peut alors écrire la variation de  $dN$  pendant  $dt$  :

$$\begin{aligned}
dN(x + dx, t + dt) &= dVn(x + dx, t + dt) = dVn(x + v_x dt, t + dt) \\
&= Sdx \left( n(x, t + dt) + v_x dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t + dt) \right) \quad \text{à l'ordre 1 en } dt \\
&= Sdx \left( n(x, t + dt) + v_x dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) \right) \quad \text{à l'ordre 1 en } dt \\
&= Sdx \left( n(x, t) + \frac{\partial n}{\partial t}(x, t)dt + v_x dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) \right) \quad \text{à l'ordre 1 en } dt \\
&= dN(x, t) + Sdx \left( \frac{\partial n}{\partial t}(x, t)dt + v_x dt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) \right) \quad \text{à l'ordre 1 en } dt
\end{aligned} \tag{2}$$

Cependant, on peut également écrire cette variation en fonction de ce qui sort et ce qui entre dans  $dV$  :

$$\begin{aligned}
dN(x + dx, t + dt) &= dN(x, t) + S[j(x, t) - j(x + dx, t)]dt \\
&= dN(x, t) - Sdx \frac{\partial j}{\partial x}(x, t)dt \quad \text{à l'ordre 1 en } dx
\end{aligned} \tag{3}$$

On peut donc combiner ces deux équations pour obtenir

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_x \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{\partial j}{\partial x} \tag{4}$$

On peut généraliser cette équation pour écrire en 3 dimensions :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})n + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = 0} \tag{5}$$

Pour un milieu immobile, on écrit  $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = 0$ .

Avec un terme source  $p$  représentant le nombre de particules produites par unité de volume et de temps, on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})n + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = p$$

Dans le cas à 1 dimension où  $\vec{v}$  n'est pas uniforme, on peut réécrire  $dN$  comme :

$$\begin{aligned}
dN(x + dx, t + dt) &= \{ \text{quantité à l'instant } t \text{ entre } x + v(x, t)dt \text{ et } x + dx + v(x + dx)dt \} \\
&\quad - \{ \text{quantité à l'instant } t \text{ entre } x \text{ et } x + dx \} \\
&= n(x + v(x, t)dt, t + dt)S \{ [x + dx + v(x + dx, t)dt] - [x + v(x, t)dt] \} \\
&\quad - n(x, t)S \{ x + dx - x \} \\
&= \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt + v \frac{\partial n}{\partial x} S dx dt + n \frac{\partial v}{\partial x} S dx dt \\
&= \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt + \frac{\partial(nv)}{\partial x} S dx dt
\end{aligned} \tag{6}$$

On a toujours  $dN = - \frac{\partial j}{\partial x}(x, t)S dx dt$  donc l'équation de conservation à 1 dimension devient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(j + nv) = 0 \tag{7}$$

La généralisation en 3 dimensions donne alors

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_n + n \vec{v}) = 0} \tag{8}$$

Encore une fois, ces équations de conservations sont analogues à celles obtenues pour l'énergie et la charge électrique.

### Remarque

Dans les calculs, on prend parfois pour simplifier  $n$  en  $x$  et non pas en  $x + dx$  car l'erreur commise est d'ordre 2 donc négligeable.

## 1.3 Types de transport

On peut identifier deux modes de transport dans l'équation de conservation :

- **l'advection/la convection** : il s'agit du terme  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) n$ .

On voit que ce mode de transport nécessite une vitesse non nulle du milieu. les particules de milieu entraînent les particules étudiées, comme quand on touille sa tasse de thé par exemple.

- **la diffusion** : il s'agit du terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n$ .

Ce mode de transport a lieu sans que le milieu soit en mouvement macroscopique, même si il est dû aux mouvements microscopiques des particules. On peut la voir quand on laisse diffuser du thé dans une tasse sans touiller. Si on touille, la diffusion sera masquée par la convection.

On va dans cette leçon s'intéresser plus en détail au phénomène de diffusion, qui est un phénomène général pouvant être rencontré dans des solides, des liquides ou des gaz, que ce soit pour transporter de la chaleur ou des particules.



## 2 Diffusion

### 2.1 Phénoménologie

↪ Diu

↪ Renvoizé p.610, Choimet p.88



#### Diffusion d'ammoniac :

On place un fil de cuivre sur lequel on a attaché des bouts de papier de phénolphtaléine (devient rose en milieu basique) dans un tube en verre fermé. On introduit alors à une des extrémité un coton imbibé d'ammoniac (attention à ne pas créer trop de mouvement d'air!), puis on referme le tube. On observe alors l'ammoniac se diffuser.

Si il existe une variation d'une quantité dans l'espace, c'est à dire un gradient, le système réagit en développant un flux. Dans le cadre d'écart de température, c'est un flux de chaleur. Du point de vue phénoménologique, on peut penser que la réponse du système est une fonction de l'écart à l'équilibre, caractérisée par le gradient. Prenons une grandeur  $\psi$ , et un courant  $\vec{j}_\psi$  peut écrire :

$$\vec{j}_\psi = \vec{f} \left( \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \right) \quad (9)$$

Une telle égalité repose sur une hypothèse supplémentaire, celle que le courant en un point donné ne dépend que du gradient en ce point. On ignore également tout effet de mémoire.

**Approximation linéaire** : l'approximation linéaire est de dire que la fonction  $f$  est une fonction linéaire du gradient, et constitue la **loi de diffusion linéaire** :

$$\vec{j}_\psi \propto \vec{\nabla} \psi \quad (10)$$

Grandeur	Énergie [J]=[W s]	Particules [N]	Charge [C]=[A s]	$\vec{p}$ [kg m s <sup>-1</sup> ]
Densité de courant	$\vec{j}_Q$ [W m <sup>-2</sup> ]	$\vec{j}_n$ [s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> ]	$\vec{j}$ [A m <sup>-2</sup> ]	$\frac{d\vec{F}}{dS}$ [kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup> ]
Cause	$\vec{\nabla}T$	$\vec{\nabla}n$	$\vec{\nabla}V$	$\vec{\nabla}\vec{v}$
Coefficient de transport	$\kappa$ conductivité thermique [W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	$D$ coef. de diffusion [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\sigma$ conductivité électrique [Ω <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\eta$ viscosité dynamique [kg m <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]
Nom de la loi	Fourier	Fick	Ohm	Newton

TABLE 1 – Lois de transport linéaires dans différents domaines de la physique. À chaque fois, le flux est dû à une variation d'une grandeur intensive.

### Validité :

- Faible écart à l'homogénéité, sinon tenseur d'ordre 2.
- Faible variation temporelle, sinon retard.
- Milieu isotrope sinon tenseur  $D$ .

## 2.2 Exemple d'une approche microscopique : cas de la loi de Wiedemann-Franz/Fourier

Tentons, à l'aide du modèle de Drude, de justifier cette loi et d'obtenir une expression de  $\kappa$ . Les métaux sont de bons conducteurs thermiques, nous pouvons alors supposer que ce sont les électrons qui sont responsables de la conduction thermique. Considérons une surface  $S$  à la température  $T$  dans un métal, à travers laquelle passe un flux  $\phi_Q = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$ , dû à une différence de température de part et d'autre de cette surface.

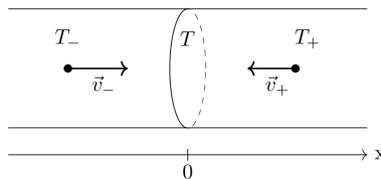


FIGURE 1 – Situation étudiée pour établir la loi de Fourier

Nous nous plaçons dans le référentiel lié au métal et dans le cas où l'équilibre thermodynamique local est réalisé. Le métal possède une densité  $n$  d'électrons libres pouvant participer à la conduction. L'agitation thermique confère aux électrons une vitesse  $\vec{v}(T)$  telle qu'en moyenne,  $\langle v(T) \rangle = \sqrt{3k_B T / m_e}$ , ce qui correspond à une énergie cinétique de  $\frac{3}{2}k_B T$ .

Chaque électron conserve cette vitesse et cette énergie tant qu'il n'entre pas en collision avec les ions métalliques. Un électron parcourt donc en moyenne une distance  $v\tau$  avant de subir une éventuelle modification de son énergie cinétique, telle que  $\tau$  soit la durée moyenne séparant deux collisions. De plus, la distribution aléatoire de la direction de  $\vec{v}$  donne

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle \quad (11)$$

Comme il est possible d'avoir  $v_x$  positive ou négative, il nous faudra apposer un facteur  $1/2$  dans notre calcul. La loi de Fourier étant une loi au premier ordre dans les variations de  $T$ , nous ne prendrons pas en compte la différence de vitesse des électrons due à la différence de température dans notre calcul. Déterminons  $j_x$ .

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{1}{2}n(-e_c^+v_x^+ + e_c^-v_x^-) \\ &= \frac{3}{4}nv_xk_B(T_- - T_+) \\ &= -\frac{3}{4}nv_xk_B(-2v_x\tau\nabla T) \end{aligned} \quad (12)$$

Ainsi on trouve la valeur de  $\kappa = \frac{3}{2}nv_x^2k_B\tau$ . Grâce au modèle de Drude des métaux, on a  $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$ , d'où l'on tire :

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 \sigma T \quad (13)$$

Il s'agit PRESQUE<sup>1</sup> de la loi de Wiedemann-Franz reliant de manière théorique conductivités thermique et électrique pour un métal, ce qui est remarquable! Nous pouvons interpréter ce résultat comme une manifestation des électrons comme vecteurs du courant électrique et du courant thermique.

**Ordres de grandeur :** Pour le fer,  $\frac{1}{\sigma} = 8.9 \mu\Omega \text{ cm}$  à 273 K, ce qui nous donne  $\kappa \simeq 0.34 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . La valeur effectivement mesurée est  $0.8 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . On a donc le bon OdG mais pas vraiment la valeur attendue.

En réalité,  $\frac{\kappa}{\sigma T} \simeq 2.22 \times 10^{-8} \text{ W } \Omega \text{ K}^{-2}$  pour les métaux. Le facteur 2 observé entre les résultats expérimentaux et la valeur calculée provient de l'approche classique, qui à l'échelle quantique est vouée à l'échec. Une approche semi-classique par la statistique de Fermi nous aurait donné :

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 \quad (14)$$

Nous obtenons alors pour le fer  $\kappa \simeq 0.75 \text{ W cm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , ce qui est la valeur effectivement mesurée, la loi de Fourier est ainsi justifiée.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à mettre cette magnifique équation en relation avec l'équation de conservation, et on aura tout ce dont on peut rêver!



## 2.3 Équation de diffusion

**Rappel :** la loi de conservation donne l'équation 5.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \psi) \quad (15)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion du milieu. Nous nous limiterons à un milieu homogène de sorte à ce que  $D$  ne dépende pas de l'espace :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \Delta \psi \quad (16)$$

1. Il faudrait un  $\frac{3}{2}$

Encore une fois, cette équation se retrouve dans de nombreux domaines de la physique :

Diffusion	thermique	de particules	de quantité de mouvement
Conservation	de l'énergie	de la matière	de la qté de mvmt
Équation locale de conservation	$\rho c_P \partial_t T + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = 0$	$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = 0$	$\rho \partial_t \vec{v} = \vec{f}_V$
Équation de diffusion	$\partial_t T = D_{th} \Delta T$	$\partial_t n = D \Delta n$	$\partial_t \vec{v} = \nu \Delta \vec{v}$
Coefficient de diffusion	$D_{th} = \frac{\kappa}{\rho c_P}$ diffusivité thermique [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$D$ diffusivité [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\nu = \eta/\rho$ viscosité cinématique [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]

Élément	D (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> )
NH <sub>3</sub> dans l'air (CNTP)	2.10 <sup>5</sup>
Gaz	10 <sup>-6</sup> – 10 <sup>-4</sup>
Liquides	10 <sup>-12</sup> – 10 <sup>-8</sup>
Solides	10 <sup>-30</sup> – 10 <sup>-16</sup>

## 2.4 Propriétés de l'équation de diffusion

### 2.4.1 Linéarité

On dispose donc du théorème de superposition, ce qui est d'une efficacité redoutable pour de nombreux calculs. On a également accès à la décomposition de Fourier, qui est aussi très redoutable.

On peut aussi séparer les variable en Fourier, ce qui donne une résolution quasi instantanée :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\psi}(k, t) - Dk^2 \tilde{\psi}(k, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\psi}(k, t) = \tilde{\psi}(k, 0) e^{-Dk^2 t} \quad (17)$$

Les hautes fréquences spatiales vont être gommées nettement plus rapidement que les fréquence basse,  $\tau(k) = \frac{1}{Dk^2}$ .

Un cas particulier de cela est la distance parcourue par des particules dans un milieu.

## Distance parcourue

Intéressons nous à la distance parcourue en un temps  $t$ . Pour cela : **SORTIR PYTHON**.

$$n(x, t) = \frac{N}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{x^2}{Dt}}$$

On peut écrire par analyse dimensionnelle et/ou par résolution en 1D que :

$$\ell \sim \sqrt{Dt} \quad (18)$$

## Irréversibilité

Contrairement à l'équation de d'Alembert, l'équation de diffusion a la fâcheuse tendance de n'être pas réversible. En effet une transformation de  $t$  en  $-t$  modifie l'équation de la diffusion, ce qui signifie que les phénomènes qu'elle décrit sont irréversibles.

Nous n'avons vu qu'un seul autre cas d'équation provoquant une irréversibilité jusque là, avec le second principe de la thermodynamique. Procédons à une approche qualitative. Soient deux systèmes identiques si ce n'est par leurs températures  $T_1 \neq T_2$ . Une fois mis en contact, la chaleur diffuse de l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'ensemble soit à la température  $T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ . Alors,

$$S_{1+2}(T_0) = S_1(T_0) + S_2(T_0) = 2S_x(T_0) > S_1(T_1) + S_2(T_2)$$

par concavité de l'entropie. On en déduit une augmentation de l'entropie, ce qui respecte bien le second principe et montre, qualitativement, que la diffusion est un processus irréversible.

Nous pouvons nous poser la question de savoir en combien de temps une distance  $l$  est parcourue par diffusion. Dans le cas de molécules dans l'air,  $D = 0,24 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ . Ainsi, pour qu'une molécule parcoure une distance  $l \sim 5 \text{ m}$ , il faut un temps  $t \sim 10^6 \text{ s}$  (10 jours). L'expérience du quotidien nous force à penser qu'il doit exister un autre mode de transport.

## 2.5 L'expérience de Jean-Perrin

Cette expérience se base sur la compétition diffusion-gravité.

Elle est disponible à <http://bouquins.isabelle.free.fr/dotclear/public/Thermo/T07PerrinAvogadro.pdf>, ou dans [Perrin.pdf](#).

## 3 Autres détails

### 3.1 Advection

L'advection est le transport d'une quantité dû à son entraînement par le mouvement d'un milieu. C'est le phénomène qui a lieu lorsque l'on mélange de la soupe avec une cuillère. Un cas particulier d'advection est la convection. Il s'agit d'une advection dont la cause est une instabilité du milieu. On peut citer la convection dans l'atmosphère terrestre, les courants marins, *etc.*

Advection et convection sont donc fondamentalement différentes de la diffusion, où le milieu peut être au repos ! Le transport par advection peut en particulier être bien plus rapide que le transport par diffusion lorsque le milieu se déplace à une vitesse suffisamment grande face à la vitesse de diffusion de la grandeur physique dont il est question.

Le vecteur densité de courant s'écrit alors

$$\vec{j} = \psi \vec{v}_m$$

avec  $\vec{v}_m$  la vitesse du milieu. C'est le milieu qui porte  $\psi$ , et la vitesse *n'est pas* la vitesse des particules mais seulement celle du milieu qui les contient !

On a lors l'équation d'advection, qui s'obtient en mettant la forme précédente dans l'équation 5.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (19)$$

Or on ne se préoccupe pas ici du caractère compressible du milieu,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  donc on peut écrire :

$$\frac{D\psi}{Dt} = 0 \quad (20)$$

Cette équation fait apparaître la dérivée particulière déjà rencontrée en mécanique des fluides.

Type de transport	Vitesse	Distance parcourue en 1s (m)
Diffusion (eau liquide)	mal définie, mais $l \sim \sqrt{Dt}$	$10^{-4}$
Diffusion (aluminium)	mal définie, mais $l \sim \sqrt{Dt}$	$10^{-2}$
Advection (soupe)	$v_{\text{milieu}} \sim 10^{-1} \text{ms}^{-1}$	$10^{-1}$
Advection (chute d'eau)	$v_{\text{milieu}} \sim gt$	5

### 3.2 Nombre caractéristiques (Péclet, Reynolds)

Lorsqu'il y a diffusion et advection, nous obtenons, compte tenu des équations précédentes

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\text{tot}} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\text{adv}} + \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\text{diff}} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi + D \Delta \psi \quad (21)$$

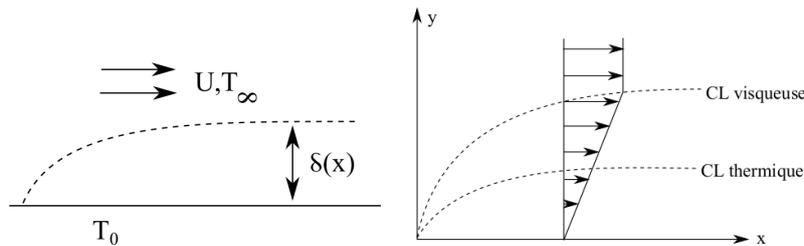
Nous pouvons comparer l'importance relative de ces deux effets en calculant un ordre de grandeur du rapport des termes correspondants :

$$\frac{\text{advection}}{\text{diffusion}} = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi|}{|D \Delta \psi|} \sim \frac{\ell v}{D} \quad (22)$$

En mécanique des fluides, appliqué au transport de quantité de mouvement, ce nombre est appelé nombre de Reynolds. Dans le cadre de la diffusion pour des quantités quelconques, il est nommé **nombre de Péclet**. Il permet, dans certains cas, de négliger un de ces deux termes par rapport à l'autre. Nous obtenons alors des écoulements laminaires pour  $Re \ll 1$  ou turbulents pour  $Re \gg 1000$ , lorsque les effets convectifs dominent les effets diffusifs. Nous pouvons en particulier en déduire que pour une vitesse d'écoulement du fluide suffisante, les effets diffusifs sont négligeables face aux effets d'advection.

### 3.3 Couche limite

➤ GHP, chapitre 10



Le nombre de Reynolds nous donne pas tout non plus : on a toujours l'existence de cette couche limite où les phénomènes diffusifs sont primordiaux.

- Couche limite visqueuse :  $\delta_v = \sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu x / U}$
- Couche limite thermique :  $\delta_\theta = \sqrt{D_{th} t} = \sqrt{D_{th} x / v_{lim}}$

On peut ainsi définir le nombre de **Prandtl** :  $Pr = \frac{\nu}{D_{th}}$ .

- $Pr \ll 1$  :  $v_{lim} = U$ , donc  $\delta_{th}$  domine et vaut  $\sqrt{\frac{D_{th} x}{U}}$

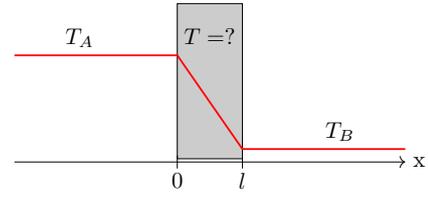
- $Pr \gg 1$  :  $v_{lim} = \frac{\delta_\theta}{\delta_v} U$ , alors la couche limite visqueuse domine, et on a  $\left(\frac{\delta_\theta}{\delta_v}\right)^3 = \frac{1}{Pr}$

Cette dernière formule est intéressante puisqu'elle nous dit que pour des nombres de Prandtl voisins de 1 (comme c'est le cas pour l'air), les deux couches limites sont en gros de la même épaisseur, et la couche limite thermique est "piégée" dans la couche limite visqueuse. Ainsi, pour refroidir mon assiette de soupe, je veux réduire la couche limite thermique, et pour cela il me suffit de réduire la couche limite visqueuse (puisque l'une agit sur l'autre), ce que je fais en soufflant sur ma soupe.

### 3.4 Application au double vitrage :

➤ Diu, se laisser guider, Double\_Vitrage.pdf

**Position du problème** Déterminons, en régime stationnaire, le flux de chaleur et la distribution de température à l'intérieur d'une paroi d'épaisseur  $l$  et d'aire  $A$ , lorsque ses faces sont maintenues à des températures constantes et différentes  $T_A$  et  $T_B$ . Nous supposons négligeables les effets thermiques sur le pourtour de cette paroi ; il s'agit alors d'un problème à une dimension dans lequel la seule variable géométrique pertinente est l'abscisse  $x$  suivant l'axe perpendiculaire à la paroi. Supposons la paroi homogène, de conductivité thermique  $\kappa$  et de coefficient de diffusion  $D_{th}$  que nous noterons simplement  $D$  par la suite.



**Figure 3** – Situation étudiée. En rouge, le profil de température déterminé.

**Établissement de l'équation de la chaleur** Dans cette situation, la grandeur physique  $\Psi$  est l'enthalpie, car nous nous plaçons à pression constante. Dans ce cas,  $\psi = h$ . Or, pour un corps donné, avec  $\rho$  sa masse volumique et  $c_P$  sa capacité calorifique massique à pression constante,

$$dh = \rho c_P dT, \text{ si bien que (4) donne} \quad \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - D \Delta T = 0 \quad (26)$$

**Solution de l'équation de la chaleur** En régime stationnaire, (26) donne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T = D \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = ax + b \quad (27)$$

soit, avec les conditions aux limites du problème à savoir  $T(0) = T_A$  et  $T(l) = T_B$ ,

$$T(x) = T_A + (T_B - T_A) \frac{x}{l} \quad (28)$$

On en déduit grâce à la loi de Fourier

$$\vec{j}_Q = -\kappa \vec{\nabla} T = -\kappa \frac{T_B - T_A}{l} \vec{e}_x \quad (29)$$

**Notion de résistance thermique** Nous pouvons, à partir de l'expression de  $\vec{j}_Q$ , déterminer la quantité de chaleur  $I_Q$  qui traverse la paroi par unité de temps, correspondant au flux de  $\vec{j}_Q$  à travers la paroi :

$$I_Q = \frac{A\kappa}{l} (T_A - T_B) \quad (30)$$

Cette relation a même forme que la loi d'Ohm en électrocinétique, la température remplaçant le potentiel électrique et le flux de chaleur l'intensité du courant. Dans le cadre de cette analogie, on définit la « résistance thermique »  $R_{th}$  de la paroi comme

$$R_{th} \equiv \frac{l}{\kappa A} \quad (31)$$

Cette expression est évidemment à rapprocher de l'expression de la résistance d'un conducteur de longueur  $l$  et de section  $A$  :  $R = \frac{l}{\sigma A}$ .

**Flux de chaleur** Par analogie avec l'électrocinétique, nous pouvons écrire

$$I_Q = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\sum_i R_{thi}} \quad (32)$$

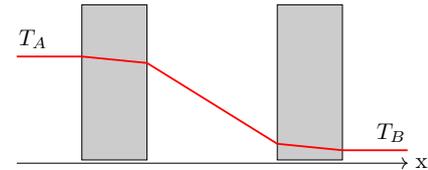
Pour  $T_{int} - T_{ext} \sim 10^\circ\text{C}$  et une vitre d'une surface de  $1 \text{ m}^2$  et de  $5 \text{ mm}$  d'épaisseur,

$$I_Q(\text{simple vitrage}) = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\frac{l}{\kappa A}} \sim 2 \text{ kW} \quad (33)$$

Comme il est possible de le voir dans la table 4, une couche d'air dans laquelle ne se produit pas de convection constitue un excellent isolant thermique. Ainsi, avec  $l' = 1 \text{ cm}$  d'air entre deux vitres identiques à celle étudiée précédemment :

$$I_Q(\text{double vitrage}) = \frac{T_{int} - T_{ext}}{2 \frac{l}{\kappa A} + \frac{l'}{\kappa_{air} A}} \sim 25 \text{ W} \quad (34)$$

Le double vitrage permet donc de réduire les pertes de chaleur !



**Figure 4** – Situation étudiée avec double vitrage. En rouge, l'allure du profil de température.

### 3.5 Double diffusion

Lorsque deux gradients (température et composition par exemple) donnent lieu simultanément à deux diffusions, avec des coefficients de diffusion différents, des phénomènes nouveaux peuvent apparaître. En ordre de grandeur, on suppose que  $\frac{D_{th}}{D} = 10^2$ .

On considère un milieu stratifié, où de l'eau chaude salée se trouve au dessus d'eau froide douce. Comme la chaleur diffuse plus vite que la salinité, la parcelle de fluide qui diffuse peut s'équilibrer thermiquement sans s'équilibrer salinément, et on observe alors des doigts de sel!

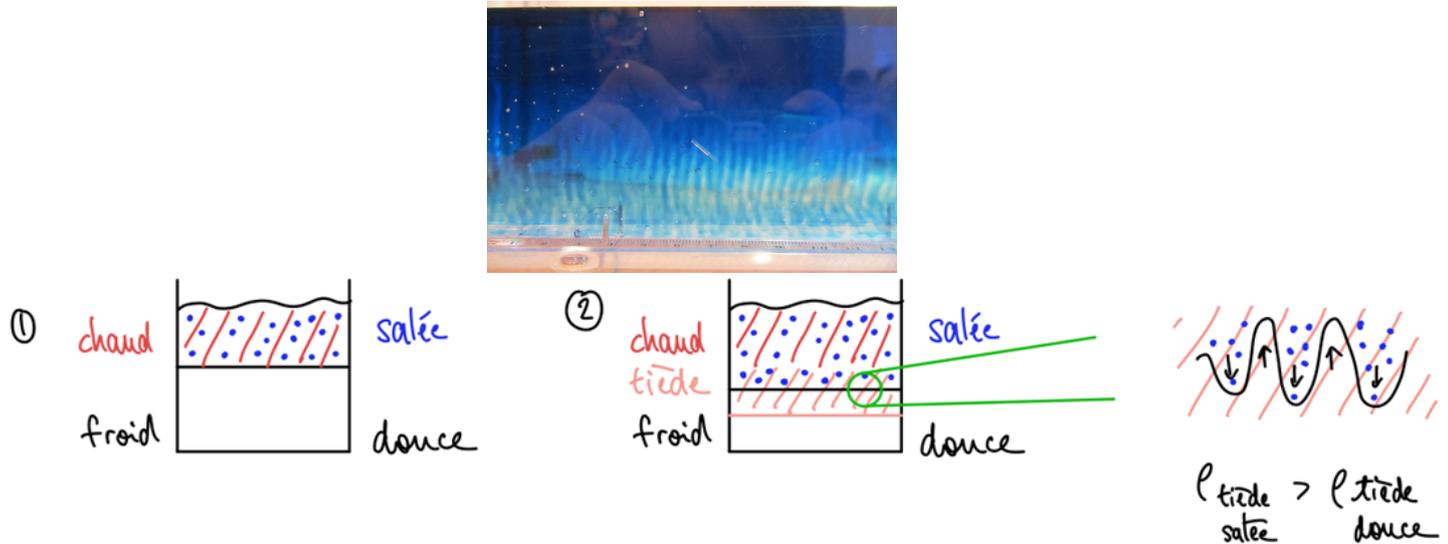


FIGURE 2 – Les doigts de sel.

Paradoxalement, le fait que la salinité diffuse lentement fait qu'elle se mélange mieux! Ce phénomène est essentiel au mélange vertical des océans, et donc au transport du  $\text{CO}_2$  (les océans absorbent 30% des émissions humaines).

### Conclusion

**Ouverture :** rayonnement!