

Exercices : 12 - Conduction - Convection - Rayonnement

A. Régime stationnaire

1. Température d'interface et régime stationnaire

On met en contact, suivant leur surface commune, d'aire S , deux conducteurs thermiques limités par des plans parallèles. En régime stationnaire, l'ensemble des deux conducteurs, de même épaisseur e , se comporte comme un système dont l'état ne dépend que de la seule coordonnée spatiale z le long de l'axe perpendiculaire à leur plan. En outre, les températures des faces des deux conducteurs qui ne sont pas en contact sont maintenues aux valeurs $T_1 = 293\text{ K}$ et $T_2 = 373\text{ K}$ respectivement. On désigne par λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques des deux corps.

1. Quelle est l'expression de la résistance thermique de chaque conducteur en fonction de e , S et de sa conductivité thermique? En déduire la résistance thermique R_{th} de l'ensemble des deux conducteurs placés en série.
2. En s'appuyant sur l'analogie avec la loi d'Ohm, montrer que la température T_i à l'interface est telle que : $T_i - T_1 = \alpha(T_2 - T_1)$ où α est une quantité que l'on exprimera en fonction des résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} des deux conducteurs. En déduire T_i en fonction de T_1 , T_2 , λ_1 et λ_2 .
3. Application : Calculer T_i pour un conducteur organique comme le corps humain, ($\lambda_1 = 0,5\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) en contact avec du bois ($\lambda_2 = 0,2\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) puis en contact avec du cuivre ($\lambda_2 = 390\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Réponses : $R_1 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{e}{S}$, $R_2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{e}{S}$, $R_{tot} = (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) \frac{e}{S}$, $T_2 - T_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(T_2 - T_1)$, $T_i = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $T_i = 43^\circ\text{C}$, $T_i \simeq 100^\circ\text{C}$.

2. Résistance thermique cylindrique, sphérique

On considère un manchon cylindrique de conductivité λ , de hauteur H , de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 . La paroi intérieure est portée à la température T_1 et la paroi extérieure à $T_2 > T_1$. Le régime permanent indépendant du temps est établi.

1. Représenter les lignes de densité de courant de transfert thermique. Réfléchir aux invariances et aux symétries.
2. En déduire la forme de dépendance en fonction de r du vecteur densité de courant de transfert thermique et de la température $T(r)$.
3. Calculer la résistance thermique équivalente de ce manchon.
4. Reprendre la même étude pour une coquille sphérique.

Réponses : $T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} + T_1$, $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{r} \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2/r_1} \vec{e}_r$, $R = \frac{\ln r_2/r_1}{\lambda 2\pi H}$, $T(r) = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} [\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}] (T_2 - T_1) + T_1$, $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{r^2} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_2 - T_1) \vec{e}_r$, $R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi \lambda r_1 r_2}$.

3. Ailettes de refroidissement

Pour éviter l'échauffement d'un appareil dû à l'effet Joule, on munit son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques. Chaque ailette est parallélépipédique, de dimensions $a = 2,0\text{ mm}$ (épaisseur), $b = 10\text{ cm}$ (largeur) et $c = 20\text{ cm}$ (longueur). On pourra admettre que a est négligeable devant b . En fonctionnement, le boîtier de l'appareil M sera maintenu à la température $T_M = 60^\circ\text{C}$. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20^\circ\text{C}$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette. Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, est monodimensionnel dans la direction de l'axe Ox . Il obéit à la loi de Fourier, la conductivité thermique étant $\lambda = 16\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On note $T(x)$ la température de l'ailette à l'abscisse x . Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, à travers la couche limite. Le flux thermique au niveau d'une surface dS de l'élément de l'ailette de longueur dx est de la forme :

$$dP = h(T(x) - T_A)dS$$

où $h = 150\text{ SI}$ est un coefficient uniforme et constant.

1. Expliquer la loi de FOURIER et donner l'unité du coefficient h dans le système international.
2. Écrire le bilan des transferts d'énergie pour la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$, en régime permanent. On posera : $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ et on donnera la valeur numérique de L ainsi que son unité. En déduire l'équation différentielle dont $T(x)$ est la solution.
3. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer l'expression de $T(x)$. On vérifiera que $L \ll c$ et on pourra considérer c comme infini pour simplifier.

- Donner l'expression de la puissance thermique dP sortant de la surface latérale dS de la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En déduire l'expression de la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, faire l'application numérique.
- Exprimer et calculer la puissance thermique transmise du boîtier de l'appareil M à l'ailette en $x = 0$. Conclure.
- Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer un flux thermique total de $0,9 \text{ kW}$? La taille de chaque ailette peut-elle être réduite sans changer notablement l'ensemble des résultats précédents ? Si oui, expliquer comment et pourquoi.

Réponses : $L = 1,03 \text{ cm}$; $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_A}{L^2}$, $T = T_A + (T_M - T_A) \exp -\frac{x}{L}$; $P = \lambda \frac{ab}{L} T_M \simeq 100 \text{ W}$; la puissance évacuée est en $b\sqrt{a}$, on peut réduire c tout en conservant $c \gg L$.

4. Géothermie

La croûte continentale terrestre a une épaisseur l d'environ 35 km ; elle est équivalente à une couche homogène de conductivité $\lambda = 23 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Au niveau du sol, la température est $T_2 = 273 \text{ K}$, et à la profondeur l , elle vaut $T_1 = 873 \text{ K}$.

- Calculer la puissance géothermique par unité de surface J_{th} issue de la croûte continentale.
- Les éléments radioactifs de la croûte dissipent une puissance volumique $\sigma_u = 3 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la température de la croûte.
- En déduire la puissance géothermique par unité de surface, J'_{th} , au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs. Conclure.

Réponses : $J_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{l} = 0,39 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\sigma_u}{\lambda}$, $T(x) = -\frac{\sigma_u x^2}{2\lambda} + [\frac{T_2 - T_1}{l} + \frac{\sigma_u l}{2\lambda}]x + T_1$, $J'_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{l} + \frac{\sigma_u l}{2} = 52,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, radioactivité prépondérante.

5. Isolation et pertes thermiques

Un tube cylindrique de rayon a , à la température $T_1 = 304 \text{ K}$, est séparé de l'extérieur, à la température à la température $T_2 = 275 \text{ K}$, par une gaine cylindrique d'épaisseur e , constituée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda = 0,9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- Représenter les lignes de densité de courant de transfert thermique. Réfléchir aux symétries et aux invariances.
- Quelle est l'expression de la résistance thermique de la gaine sur une longueur l ?
- Trouver la puissance thermique qui traverse la gaine sur une longueur l . Application numérique : $a = 20 \text{ cm}$, $e = 4 \text{ cm}$ et $l = 1 \text{ m}$.

On augmente l'isolation du tube au moyen d'une couche supplémentaire cylindrique, d'épaisseur e' , constituée d'un matériau isolant de conductivité thermique $\lambda' = 0,03 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- Quelle doit être la valeur de e' pour que les pertes thermiques soient divisées par 10 ?

Réponses : $\vec{j}_{cond} = j(r)\vec{e}_r$; $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln(1 + \frac{e}{a})$; $\Phi = (T_1 - T_2)/R_{th} = 900 \text{ W}$; $e' = 1,35 \text{ cm}$.

6. Conduction thermique, création d'entropie

Une barre en fer, cylindrique, de section circulaire A uniforme (diamètre $D = 1,5 \text{ cm}$), de longueur $L = 1,3 \text{ m}$, a une extrémité à l'intérieur d'un four, à la température $T_f = 494 \text{ K}$ maintenue constante. L'autre extrémité est en contact avec le milieu ambiant qui se comporte comme un thermostat à la température $T_a = 300 \text{ K}$. La surface latérale est calorifugée de telle sorte que l'on peut négliger les déperditions latérales. On étudie la diffusion thermique le long de la barre. On désigne par λ la conductivité thermique du fer : $\lambda = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La diffusion thermique est stationnaire.

- Calculer, en s'aidant de l'expression de la résistance électrique d'un conducteur ohmique de même géométrie, la résistance thermique R_u de la barre; préciser son unité SI.
- Écrire le bilan entropique pour un élément de barre, de longueur élémentaire dx , pendant la durée élémentaire dt .
- Trouver l'expression de l'entropie reçue (algébriquement) par cet élément. en fonction de dt , A , dx , λ , $T(x)$ (température au point d'abscisse x) et de sa dérivée dT/dx . L'axe Ox est orienté de l'extrémité O dans le four vers l'extrémité en contact avec le milieu ambiant.
- En déduire l'expression du taux de production d'entropie σ_S dans la barre, par unité de temps et par unité de volume. Quelle serait la production d'entropie pour un tel système à l'équilibre ? Sachant que le gradient de température le long de la barre est uniforme, calculer la production d'entropie aux extrémités. Application numérique.

Réponses : $R_u = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A}$ en $K \cdot W^{-1}$ avec $A = \frac{\pi D^2}{4}$, $\delta S_{cr} = -\delta S_{tr}$, $\delta S_{cr} = \sigma_S A dx dt$, $\sigma_S = -\lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)$, $\frac{dT}{dx} = \frac{T_a - T_f}{L}$, $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$, $\sigma_S = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{T_f - T_a}{L} \right)^2$, $\sigma_S(x=0) = 1,46 W \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$ et $\sigma_S(x=L) = 3,96 W \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$

7. Mammifère marin

Un mammifère marin est modélisé par une boule de rayon R et de centre O . À l'intérieur de son corps, il produit une puissance thermique volumique φ_0 . On suppose que la température de l'animal est uniforme, elle est notée T_c . La sphère est placée dans un fluide (eau de mer) de conductivité thermique λ . Pour simplifier, on considérera que le fluide est au repos et on négligera la convection. La température loin de la boule est $T_0 = 293 K$. Le vecteur densité de courant de transfert thermique est radial et s'écrit $\vec{j}_{th} = j_{th}(r)\vec{e}_r$. On suppose que le régime permanent est établi.

1. Rappeler la loi de FOURIER de la conduction thermique et la commenter.
2. Quelle est l'unité de la conductivité thermique ?
3. Connaissiez-vous des lois analogues à la loi de FOURIER ?
4. Calculer le flux thermique ϕ dans le fluide en fonction de φ_0 et R en régime permanent.
5. Calculer $j_{th}(R)$
6. Montrer que pour $r > R$, $j_{th}(r) = \frac{A}{r^2}$ avec A constante. Expliciter A .
7. Déterminer l'équation vérifiée par $T(r)$ dans le fluide.
8. Établir que pour $r > R$, la température est donnée par :

$$T(r) = T_0 + \frac{a}{r}$$

où on exprimera a .

9. Exprimer la température cutanée T_c de l'animal en fonction de φ_0 , R , λ et T_0 ;
10. On donne la conductivité thermique de l'eau de mer $\lambda = 0,6 SI$, le rayon $R = 25 cm$. Calculer φ_0 pour $T_c = 303 K$. Pourquoi n'existe-t-il pas de petits mammifères marins ? Quelle est la principale critique que vous feriez à ce modèle ?

Réponses : La loi de FOURIER traduit les transferts thermiques des corps chauds vers les corps froids $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$, λ est en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, la loi d'OHM $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{grad} V$ en électricité, $\phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \varphi_0$, en régime permanent $j_{th}(r)4\pi r^2 - j_{th}(r+dr)4\pi(r+dr)^2 = 0$ d'où $j_{th} = \frac{A}{r^2}$, par continuité en $r = R$, on a $j_{th}(R) = \frac{\phi}{4\pi R^2}$ et donc $j_{th}(r) = \frac{R^3}{3r^2} \varphi_0 = -\lambda \frac{dT}{dr}$ d'où $T(r) = T_0 + \frac{R^3 \varphi_0}{3\lambda r}$ en utilisant $T(r \rightarrow \infty) = T_0$, on a $T_c = T_0 + \frac{R^3 \varphi_0}{3\lambda}$, on en tire $\varphi_0 = \frac{(T_c - T_0)3\lambda}{R^2} = 288 W \cdot m^{-3}$, plus l'animal serait petit plus la puissance volumique à fournir φ_0 serait élevée, il manque la convection qui en réalité la principale cause de pertes thermiques.

8. De la souris à l'éléphant...

On dit qu'une fonction $y(x)$ vérifie une loi d'échelle d'exposant α si y est proportionnel à x^α . De nombreux paramètres physiologiques concernant les espèces animales d'un même groupe zoologique obéissent à de telles lois. Ainsi, les mammifères terrestres ayant une température corporelle proche de $37^\circ C$ vérifient assez bien la relation : $Q_{O_2} = 0,68 M_c^{3/4}$ où M_c désigne la masse corporelle en kilogramme et Q_{O_2} , la consommation en dioxygène en litre par heure au repos, dans des conditions expérimentales précises. Cette loi, découverte en 1932 par M. KLEIBER, peut être mise en rapport avec la puissance thermique dégagée par le métabolisme de l'animal.

1. Les morphologies des animaux d'un même groupe étant voisines, le volume de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de cœur est à peu près proportionnel à la masse corporelle M_c . Sachant que pour un homme de 70 kg, la fréquence cardiaque est d'environ 70 battements par minute, déterminer la loi d'échelle exprimant la fréquence cardiaque f_c d'un animal en battements par minute en fonction de sa masse corporelle M_c en kilogramme.
2. Étudier la validité de la loi précédente pour la souris, le lapin et l'éléphant à l'aide du tableau ci-dessous :

	souris	lapin	renard	éléphant
M_c (kg)	0,015	2,0	3,0	3 000
f_c en batt/min	620	210		37
τ_{vie} (années)	3,5		14	80

3. Le tableau précédent donne également la durée de vie moyenne τ_{vie} de quelques mammifères terrestres. À l'aide de ces valeurs numériques, déterminer l'exposant de la loi d'échelle $\tau_{vie}(M_c)$. Proposer une interprétation de cette loi. Le cas de l'homme vérifie-t-il cette loi ? Commenter.

4. Sachant qu'en moyenne, on estime qu'un litre de dioxygène consommé par un animal correspond à un dégagement d'énergie d'environ 20 kJ, donner la relation numérique qui exprime la puissance thermique P en watt dégagée par l'animal en fonction de sa masse M_c en kilogramme. Donner la valeur numérique de P pour un homme de 70 kg. Commenter.
5. Le plus petit mammifère terrestre vivant en milieu tempéré est la *musaraigne pachyure étrusque* et ne pèse que deux grammes. À l'aide de la loi $P(M_c)$, on se propose de retrouver l'ordre de grandeur de cette masse. Pour cela, on modélise le corps de l'animal par une sphère homogène de rayon R_a et de masse volumique $\mu \simeq 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, de température $T_i = 37^\circ\text{C}$. Autour de cette sphère, on considère que l'animal possède une fourrure d'épaisseur e , de masse négligeable, de conductivité thermique proche de celle de l'air $\lambda \simeq 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On prendra pour la température extérieure $T_e = 20^\circ\text{C}$. On étudie le régime stationnaire.
 - (a) Établir la loi de température dans la fourrure $T(r)$ en fonction de T_e , T_i , r , e et R_a .
 - (b) Exprimer la puissance thermique P dégagée par l'animal en fonction de λ , T_e , T_i , R_a , e (on ne fera pas l'approximation $e \ll R_a$).
 - (c) Montrer que le rapport e/R_a est une fonction décroissante de R_a .
 - (d) Pour des raisons de mobilité, on considère que la plus grande valeur du rapport e/R_a est de l'ordre de 1. En déduire l'ordre de grandeur de la masse du plus petit animal. Ce résultat est-il convenable ?

Réponses : $V_{O_2} = AM_c Q_{O_2} = A60f_c M_c$, $0,68 M_c^{3/4} = A60f_c M_c$ d'où $f_c = B M_c^{-1/4}$ et $f_c = 202,5 M_c^{-1/4}$, souris 580 battements par minute, lapin 170 et éléphant 27 c'est correct, $\tau_{vie} = C M_c^\beta$ d'où $\ln \tau_{vie} = \ln C + \beta \ln M_c$ $\beta \simeq \frac{1}{4}$ d'où $\tau_{vie} = C M_c^{-1/4}$ $\tau_{vie} \times f_c \simeq \text{Cte}$ le nombre total de battements de cœur est fixé, homme à 75 ans pour 70 kg, $\beta \simeq \frac{1}{2}$ l'homme est s'aide de machines pour obtenir de l'énergie, $P + \frac{20 \times 10^3 \times 0,68 M_c^{3/4}}{3600} = 3,8 M_c^{3/4}$ $P = 92 \text{ W}$ ordre de grandeur convenable, $\text{div } \vec{j}_{cond} = 0$, $j_{cond} r^2 = \text{Cte}$, $T(r) = T_e + (T_i - T_e) \frac{R_a}{e} \left[\frac{R_a + e}{r} - 1 \right]$, $P = 4\pi\lambda(T_i - T_e) \frac{R_a(R_a + e)}{e}$, $P = 3,8 \left(\mu \frac{4}{3} \pi R_a^3 \right)^{3/4}$ donc $\frac{R_a}{e} = \frac{3,8(\mu \frac{4}{3} \pi)^{3/4} R_a^{5/4}}{4\pi\lambda(T_i - T_e)} - 1$ $\frac{R_a}{e}$ est une fonction croissante de R_a , $\frac{e}{R_a}$ est une fonction décroissante de R_a , $R_a \simeq \left[\frac{8\pi\lambda(T_i - T_e)}{3,8} \right]^{4/5} \left(\frac{3}{4\pi\mu} \right)^{3/5}$, $R_a \simeq 6,7 \text{ mm}$, $m \simeq 1,3 \text{ g}$, c'est le bon ordre de grandeur.

9. Anémomètre à fil chaud

L'anémométrie à fil chaud est une technique expérimentale permettant de mesurer la vitesse d'un fluide. Son principe est le suivant : on fait parcourir un courant électrique dans un fil électrique pour le maintenir chaud. Le fluide qui s'écoule autour du fil a tendance à le refroidir et donc à faire chuter sa résistance électrique. Une mesure de cette dernière, après calibration, permet de calculer la vitesse du fluide. Ici, on considère un fil métallique conducteur cylindrique de rayon $R_0 = 10 \mu\text{m}$. Il est parcouru par une intensité $I = 1 \text{ A}$. La résistivité électrique du métal est $\rho_e = 1,8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Sa conductivité thermique est $\lambda = 370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Sa température en périphérie est $T_0 = 300 \text{ K}$.

1. Déterminer le profil de température à l'intérieur du fil.
2. Où se trouve la température maximale dans le fil ? Déterminer numériquement $T_{max} - T_0$. Conclure.

10. Exoplanète

Une exoplanète, de rayon $R = 1000 \text{ km}$, située loin de son étoile possède une température de surface $T_s = 300 \text{ K}$ bien supérieure à ce qu'elle devrait être si elle ne faisait que recevoir le rayonnement de l'étoile autour de laquelle elle gravite. On propose d'expliquer sa température de surface en considérant que son cœur est une boule radioactive de rayon $a = 10 \text{ km}$ dégageant une puissance volumique $p_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ à cause de la désintégration radioactive des noyaux qui la composent. On considère que la planète est un milieu de conductivité thermique uniforme $\lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On suppose que l'exoplanète est à symétrie sphérique et que l'on est régime indépendant du temps.

1. Pour $r \leq a$, établir un bilan énergétique locale entre r et $r + dr$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.
2. En déduire la forme de la loi $T(r)$.
3. On étudie maintenant la partie non radioactive de l'exoplanète. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$? En déduire l'expression de $T(r)$.
4. Déterminer la valeur numérique de la température au centre de l'exoplanète.

Réponses : le bilan énergétique conduit à $\frac{d}{dr}(r^2 j_{cond}) = p_0 r^2$. La loi de FOURIER indique $j_{cond} = -\lambda \frac{dT}{dr}$ d'où $\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dT}{dr}) = -\frac{p_0}{\lambda} r^2$ que l'on intègre en $T(r) = -\frac{p_0}{6\lambda} r^2 + \beta$ car $T(r)$ ne peut pas diverger en $r = 0$. Dans la partie non radioactive, on a $\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma}{r^2}$. Avec la continuité du flux de conduction et donc de $\frac{dT}{dr}$ en $r = a$, on obtient $\frac{dT}{dr} = -\frac{p_0 a^3}{3\lambda r^2}$ qui s'intègre en $T(r) = \frac{p_0 a^3}{3\lambda r} + \varepsilon$. Avec la continuité de la température à la surface, on obtient $\varepsilon = T_s - \frac{p_0 a^3}{3\lambda R}$ d'où $T(r) = T_s + \frac{p_0 a^3}{3\lambda} (\frac{1}{r} - \frac{1}{R})$. La continuité de la température en $r = a$ permet d'obtenir pour $r \leq a$, $T(r) = -\frac{p_0 r^2}{6\lambda} + \frac{p_0 a^3}{\lambda} (\frac{1}{2a} - \frac{1}{3R}) + T_s$. Au centre de l'exoplanète en $r = 0$, on trouve $T_c = \frac{p_0 a^3}{\lambda} (\frac{1}{2a} - \frac{1}{3R}) + T_s = 15\,200\text{ K}$.

B. Régime dépendant du temps

11. Mise en équilibre thermique, analogie

On considère la conduction thermique entre deux sphères de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Entre ces sphères l'espace est occupé par un matériau homogène et isotrope de conductivité thermique λ supposée constante. Les sphères sont portées respectivement aux températures T_1 et $T_2 < T_1$. Le régime est supposé stationnaire.

1. Calculer en fonction de R_1 , R_2 et λ la résistance thermique R_{th} entre les deux sphères.

Les deux sphères ont une même capacité calorifique C et ont une grande conductivité thermique de sorte qu'à chaque instant on peut considérer les températures T_1 et T_2 comme uniformes. On désignera par T_{01} et T_{02} les températures initiales des sphères. On définira une constante de temps τ qui fixe l'évolution des températures. On supposera que l'ensemble est isolé thermiquement avec le milieu extérieur.

2. Déterminer les équations qui déterminent les évolutions temporelles des températures T_1 et T_2 .
3. Quelles analogies peut-on faire ?

Réponses : $\text{div } \vec{j} = 0$ conduit à $r^2 \frac{dT}{dr} = \alpha$, $T = -\frac{\alpha}{r} + \beta$, condition aux limites $\alpha = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_2 - T_1)$, $j_{cond} = 4\pi\lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$ et $R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2}$, $R_{th} C \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_2$ et $R_{th} C \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1$, $\tau = R_{th} C$, $T_1 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} + \frac{T_{01} - T_{02}}{2} \exp -\frac{t}{\tau}$ et $T_2 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{T_{01} - T_{02}}{2} \exp -\frac{t}{\tau}$, électricité circuit RC avec $\tau = RC$.

12. Explosion dans un réacteur chimique

Un réacteur chimique est assimilé à un cylindre d'axe Ox , de section S et de longueur L contenant des réactifs. La surface latérale et les surfaces extrêmes sont calorifugées. Si la température $T(x, t)$ dépasse le seuil T_0 , une réaction chimique exothermique se produit. On traite le réacteur comme un milieu homogène de composition constante, décrit par sa conductivité thermique λ , sa masse volumique μ et sa capacité thermique massique c . On traite la réaction chimique comme une source de chaleur : dans un élément de volume $d\tau$, la réaction exothermique apporte au milieu une chaleur $\delta^2 Q = A(T - T_0)d\tau dt$. On néglige la convection.

1. En faisant un bilan d'énergie pour une tranche de réacteur comprise entre x et $x + dx$, établir l'équation dont est solution $T(x, t)$.
2. On cherche des solutions non explosives de la forme :

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \cos(kx - \varphi) \exp -\frac{t}{\tau}$$

Déterminer τ en fonction de k , A , μ , λ et c .

3. Exprimer les conditions aux limites du réacteur. En déduire φ et les valeurs possibles de k en faisant apparaître un entier n .
4. En déduire la valeur minimale L_c de la longueur L du réacteur permettant une explosion.

Réponses : $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = A(T - T_0) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$; $\tau = \frac{\mu c}{\lambda k^2 - A}$; $\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0$ imposent $\varphi = 0$ ou π et $kL = n\pi$; il y aura explosion si $\tau < 0$ et donc pour $L > n\pi \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$ d'où $L_c = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$ avec $A > 0$ puisque la réaction est exothermique.

13. Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

On néglige la sphéricité et les sources radioactives de la planète, mais on ne se place pas en régime permanent. On admet que la température dépend de t et de la profondeur z comptée positivement. Elle vérifie l'équation de diffusion :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où ρ est la masse volumique, c_p la capacité thermique massique à pression constante et λ la conductivité thermique.

1. Démontrer l'équation différentielle vérifiée par q (puissance surfacique) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

dans la quelle on notera D la diffusivité thermique $D = \lambda / \rho c_p$.

Au milieu du XIX^e siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre avait été formée à une température élevée T_1 uniforme à la date $t = 0$. Il a proposé d'autre part qu'à cette même date, sa surface avait été soumise instantanément à une température T_S . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé le refroidissement pour en déduire l'âge de la Terre. La densité de flux thermique est donc une fonction de la profondeur et du temps $q(z, t)$.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ?
3. Vérifier que la solution proposée par Lord Kelvin :

$$q(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp -\frac{z^2}{4Dt}$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

4. Les paramètres du problème sont $T_1 - T_S$, λ , ρ et c_p . On suppose que A s'exprime par :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (T_1 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c_p^\delta$$

Déterminer par analyse dimensionnelle, les valeurs des exposants de cette loi.

5. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\frac{\partial T}{\partial z}$. Lord Kelvin a admis que $T_1 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Sachant que l'augmentation de température mesurée dans les mines indiquait un gradient proche de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?
6. Que pensez-vous de l'estimation précédente ? Quel est le ou les ingrédients que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ?

Réponses : $q(z = 0, t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$, $q(z = 0, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, $q(z \neq 0, t \rightarrow 0) \rightarrow 0$, $q(z \neq 0, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$; A en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$; pour 1500 K : 80 millions d'années ; trop faible, radioactivité à l'intérieur de la Terre.

14. Régime transitoire et série de Fourier

Un solide (C) la forme d'un cylindre droit à base circulaire de hauteur L , de rayon R est constitué d'un matériau homogène et isotrope de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ supposées constantes. T désigne la température du cylindre. On appelle x la direction parallèle à l'axe du cylindre et on suppose que T ne dépend que de x et de t . On place les deux faces extrêmes de (C) (en $x = 0$ et $x = L$) en contact avec deux sources de chaleur (S') et (S'') de température respectives T' et T'' et on empêche tout transfert thermique par la face latérale. On posera $a = \frac{\lambda}{\mu c}$. Pour $t < 0$ on a $T' = T'' = T_1$. A $t = 0$ on change les sources (S') et (S'') et pour $t > 0$ on a $T' = T'' = T_0$.

1. Établir l'équation de diffusion thermique dans le cylindre.
2. Donner en le justifiant la fonction $T(x, t)$ juste avant $t = 0$.

On s'intéresse désormais à la fonction $T(x, t)$ pour $t > 0$ et on pose $\theta = T - T_0$.

3. Quelles sont les conditions aux limites pour θ en $x = 0$ et $x = L$? Quelles sont les conditions initiales à $t = 0$ (en fonction de x) ?
4. On cherche $\theta(x, t)$ sous la forme $\theta = f(t)g(x)$.

- Montrer que $g(x)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 g}{dx^2} = \alpha g$ où α est une constante indéterminée à ce stade des calculs.
- À l'aide des conditions aux limites, montrer que $-\alpha$ est positive (on posera $-\alpha = k^2$) et ne peut prendre que certaines valeurs dépendant d'un entier n .
- À quelle équation différentielle obéit $f(t)$?

— Montrer que la solution la plus générale que l'on peut obtenir par cette méthode est :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp -\frac{t}{\tau_n} \sin k_n x$$

en donnant les expressions de τ_n et k_n en fonction de n , L et a .

- À l'aide des conditions initiales montrer que le calcul des coefficients B_n se ramène au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction $g^*(x)$ dont on précisera la parité et la période. Calculer B_n et donner l'expression $\theta(x, t)$.
- Calculer le rapport r_n entre l'amplitude d'un terme quelconque du développement de θ et l'amplitude du premier terme et montrer qu'à partir d'un instant t_1 dont on donnera un ordre de grandeur on peut garder uniquement le premier terme. Donner l'allure de $\theta(x, t)$ pour $t \ll t_1$, pour $t > t_1$ puis pour $t \rightarrow \infty$.
À partir de quel instant t_2 a-t-on :

$$\frac{|T(x, t) - T_0|}{T_0} < 10^{-2}$$

Données numériques : $L = 1 \text{ m}$; $R = 2 \text{ cm}$; $\mu = 9000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $c = 400 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $T_1 = 370 \text{ K}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$.

Réponses : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$, $T(x, t = 0^-) = T_1$, $\theta(x = 0, t > 0) = \theta(x = L, t > 0) = 0$, $\theta(0 < x < L, t = 0) = T_1 - T_0$, $\frac{df}{dt} \frac{1}{f(t)} = a \frac{d^2 g}{dx^2} \frac{1}{g(x)} = \text{Cte} = \alpha$, conditions aux limites imposent $\alpha < 0$, $g_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$, $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $\tau_n = \frac{L^2}{n^2 \pi^2 a}$, $\theta(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = T_1 - T_0$, $B_n = \frac{2(T_1 - T_0)}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx$, $B_n = \frac{2(T_1 - T_0)}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$, $\theta(x, t) = 4(T_1 - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{L^2}$, $r_n = \frac{1}{2n+1} \exp \frac{t a \pi^2}{L^2} (1 - (2n+1)^2)$, $r_1 = \frac{1}{3} \exp -\frac{8 a \pi^2 t}{L^2}$, $t_1 \simeq 2 \frac{L^2}{8 a \pi^2} = 230 \text{ s}$, $\frac{4}{\pi} \frac{T_1 - T_0}{T_0} \exp -\frac{\pi^2 a}{L^2} t_2$ d'où $t_2 = 2,3 \text{ h}$.

C. Diffusion de matière

15. Neutronique

On étudie la diffusion de neutrons dans la matière fissile d'un réacteur à neutrons rapides. On appelle, en tout point $\vec{r}$ du matériau, $\rho(\vec{r}, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ la vitesse de ces neutrons. Du fait des collisions multiples des neutrons, on admet que $v = \|\vec{v}\|$ est uniforme dans le milieu. On rappelle qu'en coordonnées sphériques avec invariance en θ et φ , on a $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2}$.

- La loi de diffusion des neutrons dans le matériau fissile s'écrit $\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) = -D \nabla \text{grad} \rho(\vec{r}, t)$. Préciser le signe, l'unité de mesure et le nom du coefficient D .
- On suppose d'abord qu'aucun neutron n'est absorbé ou émis dans le milieu. En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\rho(\vec{r}, t)$.
- Du fait des absorptions des neutrons et des réactions de fission qui en produisent, le nombre de neutrons cédés au milieu par unité de volume et par unité de temps se met sous la forme $\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_m = \Sigma v \rho$.

Préciser l'unité de Σ et le signe de Σ selon que la fission l'emporte sur l'absorption ou vice-versa.

Écrire alors l'équation aux dérivées partielles satisfaite par ρ ; on supposera ici $\Sigma > 0$.

- Le milieu fissile est sphérique de rayon R ; on écrira donc, compte tenu de la symétrie, que ρ ne dépend que de la distance r au centre O de la sphère et du temps t .
(a) Déterminer $\rho(r)$ en régime permanent. On justifiera les conditions aux limites utilisées.

Montrer que ce régime permanent n'existe que si $R < R_c$ et exprimer la valeur critique R_c .

- Si $R < R_c$, ou $R > R_c$, montrer qu'il existe des solutions de la forme $\rho(r, t) = \exp(\gamma t) \varphi(r)$ et interpréter le résultat.

Réponses : D en m longueur caractéristique, $D > 0$ car la diffusion s'effectue des zones les plus concentrées vers les moins concentrées, $\Delta \rho = \frac{1}{Dv} \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $a = Dv$ diffusivité en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\Sigma > 0$ la fission l'emporte, $Dv \Delta \rho + \Sigma v \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, Σ en m^{-1} , $\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{\Sigma}{D} X = 0$ avec $X = r\rho$, $\rho_{r=0} = \rho_0$ bornée et maximale $\frac{d\rho}{dr} \Big|_{r=0} = 0$, tous les neutrons créés sortent $v\rho_{r=R} 4\pi R^2 = \Sigma v \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$, $\rho(r) = \rho_0 \text{sinc} \sqrt{\frac{\Sigma}{D}} r$, $\rho(r) > 0$ d'où $0 < R < \pi \sqrt{\frac{D}{\Sigma}}$, $\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{\Sigma v - \gamma}{Dv} Y = 0$ avec $Y = r\varphi$, si $\gamma < 0$ les neutrons disparaissent, si $\gamma < \sigma v$ alors $\varphi(r)$ en sinc sinon en $\frac{\text{sh } \alpha r}{\alpha r}$ si $\gamma > 0$ alors le nombre de neutrons diverge : explosion.

D. Soleil - Terre

16. Dilution du rayonnement solaire

La Terre et le Soleil sont considérés comme des corps noirs aux températures respectives de 300 K et 5800 K. Leurs rayons sont de 6 400 km et 700 000 km et ils sont distants de 150 millions de kilomètres.

1. Calculer les puissances rayonnées par la Terre et le Soleil.
2. Calculer l'angle solide Ω sous lequel la Terre est vue depuis le Soleil. Le rayonnement du Soleil étant supposé isotrope, en déduire la puissance reçue par la Terre due au rayonnement solaire. Conclure.

Réponses : $7,5 \times 10^{16} \text{ W}$ et $4 \times 10^{26} \text{ W}$; $\Omega = \frac{\pi R_T^2}{d^2}$, $2 \times 10^{17} \text{ W}$, situation de quasi équilibre (imprécision des calculs).

17. Température d'équilibre de la Terre et effet de serre

Le tableau 1 donne quelques valeurs numériques et constantes astronomiques.

Grandeur physique	Symbole	Valeur numérique
Constante de Stefan	σ	$5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Température de surface du Soleil	T_S	6000 K
Distance de la Terre au Soleil	a	$150 \times 10^6 \text{ km}$
Rayon solaire	R_S	700 000 km

TABLE 1 – Tableau de valeurs numériques

1. Dans un premier modèle, on considère que la Terre réfléchit la portion A (A porte le nom d'albédo) du rayonnement solaire. Le Soleil et la Terre sont assimilés à des corps noirs de températures T_S et T_1 uniformes.

Déterminer la température T_1 à l'équilibre. On donne $A = 0,35$. Faire l'application numérique.

2. On tient compte de plus des propriétés de la troposphère, couche d'épaisseur e faible devant le rayon terrestre R_T , de température T . La troposphère rayonne comme un corps noir, mais elle absorbe une fraction α du rayonnement solaire. La température de la Terre est maintenant T_2 .

- (a) Exprimer l'équation décrivant l'équilibre thermique de la Terre, reliant A , α , T , T_2 , T_S et $\gamma = \frac{R_S}{a}$.
- (b) Exprimer l'équation décrivant l'équilibre thermique de la troposphère, reliant A , α , T , T_2 , T_S et γ .
- (c) Exprimer la nouvelle température de la Terre en fonction de celle déterminée précédemment et de α .
- (d) Faire l'application numérique si $\alpha = A$. Commenter.

Réponses : $(1 - A)\sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{a}\right)^2 \pi R_T^2 = 4\pi R_T^2 \sigma T_1^4$, $T_1 = T_S \left[\frac{1-A}{4} \left(\frac{R_S}{a}\right)^2\right]^{1/4} = 260 \text{ K}$, inférieure à la valeur constatée : 285 K; $\sigma T_2^4 4\pi R_T^2 = \sigma T^4 4\pi R_T^2 + (1 - \alpha)(1 - A)\sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{a}\right)^2 \pi R_T^2$, $T_2^4 = T^4 + (1 - \alpha)T_1^4$, $\alpha(1 - A)\sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{a}\right)^2 \pi R_T^2 + \sigma T_2^4 4\pi R_T^2 = 2\sigma T_1^4 4\pi R_T^2$, $\alpha T_1^4 + T_2^4 = 2T_1^4$, $T_2 = (2 - \alpha)^{1/4} T_1 = 295 \text{ K}$, plus agréable ...

E. Objets terrestres en régime indépendant du temps

18. Fahrenheit 451

Le soleil est assimilé à une sphère de rayon $R_S = 7 \times 10^8 \text{ m}$ dont le centre est à la distance $d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$. On forme l'image du soleil à travers une lentille mince convergente de distance focale $f' = 5 \text{ cm}$ et de rayon de bord $\rho = 1 \text{ cm}$ sur une feuille de papier confondue avec le plan focal image.

1. Déterminer les caractéristiques géométriques de cette image.
2. Le flux lumineux surfacique reçu à la surface de la lentille vaut $E_0 = 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Déterminer le flux surfacique sur l'image du soleil si on suppose la lentille transparente.
3. Calculer la température du papier au niveau de l'image si on suppose l'équilibre radiatif du papier. Le papier brûle-t-il? Sa température d'autoinflammation est de 451 Fahrenheit. On donne $\theta(F) = 32 + 1,8\theta(C)$.

Réponses : Image de rayon $r = \frac{R_S}{d} f' \simeq 0,023 \text{ cm}$; $E_0 \frac{\rho^2}{r^2} = 1,9 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; $T \simeq 2400 \text{ K}$, oui.

19. Effet de serre

On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire (sauf à la question 3) où l'on tient compte du rayonnement solaire réfléchi. La vitre est en revanche totalement absorbante pour le rayonnement infrarouge émis par la plaque qui absorbe le rayonnement solaire. On désigne par φ_S le flux solaire surfacique supposé arriver normalement à la vitre et à la plaque.

- On suppose l'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre. Écrire les équations exprimant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque. On donne : $\varphi_S = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Calculer T et la température T_1 de la vitre.
- Reprenre la question précédente dans le cas de deux vitres puis de n vitres.
- Chaque vitre réfléchit une fraction r de l'énergie solaire incidente. On néglige toujours l'absorption du rayonnement solaire par les vitres. Montrer qu'il existe une valeur n_m optimale du nombre de vitres. Application numérique : $r = 0,08$.

Réponses : $\varphi_S + \varphi_V = \varphi_P$ et $\varphi_P = 2\varphi_V$ d'où $\sigma T^4 = 2\varphi_S$ et $\sigma T_1^4 = \varphi_S$, $\varphi_S + \varphi_{V1} = \varphi_P$, $\varphi_P + \varphi_{V2} = 2\varphi_{V1}$ et $2\varphi_{V2} = \varphi_{V1}$ d'où $\sigma T^4 = 3\varphi_S$, ensuite $\sigma T^4 = (n+1)\varphi_S$, cela diverge, $\sigma T^4 = (1-r)^n(n+1)\varphi_S$ optimale pour $n_m = -\frac{1}{\ln(1-r)} - 1$, $n_m \simeq 11$.

20. Utilisation thermique de l'énergie solaire

Une surface noire absorbe totalement le rayonnement solaire auquel elle est exposée et le réémet suivant une loi de corps noir dont la température T_0 est celle de la surface.

- Faire le bilan thermique de la surface en négligeant les pertes par conduction et convection et trouver l'expression de la température T_0 en fonction de J , puissance solaire reçue par unité de surface. Calculer T_0 pour une valeur de J égale à $800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire le domaine spectral du rayonnement émis.
- On interpose une vitre entre la surface noire et le rayonnement solaire. Sachant que le verre absorbe totalement l'infrarouge de longueur d'onde supérieure à $1 \mu\text{m}$ et que le rayonnement solaire n'en contient presque pas au niveau du sol, faire le nouveau bilan énergétique au niveau de la surface ainsi que celui de la vitre. En déduire la nouvelle température T_1 de la surface.
- On fait circuler de l'eau au contact de la surface noire. L'eau passe en dessous de la surface noire, la vitre proposée à la question précédente est toujours présente entre la surface noire et le rayonnement solaire. L'eau arrive à la température $t_3 = 10^\circ\text{C}$ et maintient la surface à la température $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Quelle aire de capteur faut-il utiliser pour produire 20 litres d'eau chaude à 60°C par heure ? Quelle fraction d'énergie incidente est captée (rendement) ?

On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_{eau} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses : $J = \sigma T_0^4$, $T_0 = 71^\circ\text{C}$, $\lambda_m = 9,4 \mu\text{m}$ dans l'IR, $2J = \sigma T_1^4$, $T_1 = 136^\circ\text{C}$, $J + j_2 = j_{conv} + j_1$ et $2j_2 = j_1$, de plus $j_1 = \sigma T_p^4$ avec $T_p = 333 \text{ K}$, $\mathcal{D}_m c_{eau} (t_2 - t_3) = j_{conv} S$, $S = 2,6 \text{ m}^2$, $\eta = \frac{j_{conv}}{J} = 56\%$.

21. Plaque chauffée

On dispose d'une plaque de cuivre, de surface $S = 12 \text{ cm}^2$, reliée à un circuit électrique. Il passe un courant d'intensité I à travers la section s la plaque, on note que $s < S$. On réalise successivement 3 expériences. Dans la première expérience, on éclaire un côté de la plaque pendant une durée $\Delta t_1 = 140 \text{ s}$ en l'absence de courant ($I = 0$). On observe une élévation de température $\Delta\theta_1 = 11^\circ\text{C}$. Dans la deuxième expérience, la plaque est plongée dans l'obscurité et on impose une intensité $I = 2,23 \text{ A}$ pendant une durée $\Delta t_2 = \Delta t_1 = 140 \text{ s}$. On observe la même élévation de température que dans la première expérience $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1 = 11^\circ\text{C}$. Dans la troisième expérience, on se place dans les mêmes conditions que dans la première expérience pendant une durée de 70 s . Après ces 70 s , on place la plaque de cuivre à l'obscurité et on mesure, à l'aide d'un ohmmètre, la résistance de la plaque et on trouve $R = 0,18 \Omega$.

- Déterminer la moyenne de la densité de courant de rayonnement j_{ray} (ou encore nommé vecteur de POYNTING) reçu par la plaque.
- Estimer la perte de masse du Soleil pour une année terrestre. On donne la distance Terre-Soleil $d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$, la masse $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ du Soleil et enfin le rayon du Soleil $R_s = 7 \times 10^8 \text{ m}$.

Réponses : dans la première expérience la puissance reçue est $P_1 = j_{ray} S = mc \frac{d\theta}{dt}$ si m est la capacité thermique massique du cuivre et m la masse de la plaque, on a $\theta = \frac{j_{ray} S}{mc} t + \theta_0$, d'où $\Delta\theta = \frac{j_{ray} S}{mc} \Delta t$. Pendant la seconde expérience, la puissance reçue est $P_{elec} = RI^2$ et on a $\Delta\theta = \frac{RI^2}{mc} \Delta t$. La mesure de la résistance électrique dépend de la température mais la mesure est effectuée à la température qui correspond à la moitié de l'élévation de la température pour minimiser l'influence de θ . La puissance électrique est $P_{elec} = RI^2 = 0,9 \text{ W}$. Cela signifie que $j_{ray} S = 0,9 \text{ W}$. On en déduit que $j_{ray} = 750 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. La dilution du rayonnement solaire fait que $j_{ray} 4\pi d^2 = P_S$ représente la puissance émise par le Soleil. Par la formule d'EINSTEIN, $P_S = -\frac{dm}{dt} c^2 = -\frac{\Delta m}{\Delta t} c^2$. On trouve $\Delta m = 7,4 \times 10^{16} \text{ kg}$ perdus par an, ce qui est relativement faible comparativement à la masse du Soleil.

F. Objets terrestres en régime variable

22. Sphère dans un four

Une sphère d'aluminium de masse m , et de surface S est portée à la température $T_0 = 283\text{ K}$ puis placée dans une enceinte vide dont les parois sont maintenues à la température $T_1 = 300\text{ K}$. On suppose que la capacité thermique massique c de l'aluminium est indépendante de la température. On note T la température de la sphère.

1. Exprimer la puissance reçue par la sphère et la puissance qu'elle émet.
2. Faire un bilan énergétique pendant une durée dt . Montrer que, l'écart de température entre les deux corps étant faible, on peut linéariser les transferts thermiques. On notera λ la constante de proportionnalité entre l'énergie reçue par la sphère et le produit $(T - T_1)dt$. En déduire l'équation différentielle donnant la température T en fonction du temps.
3. Établir l'évolution de T . Expliciter la constante de temps τ et faire l'application numérique avec : $m = 0,12\text{ kg}$; $\mu = 2700\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $c = 910\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}\text{ SI}$.

Réponses : $S = 4\pi R^2$, $P_r = \sigma T_1^4 4\pi R^2$, $P_d = \sigma T^4 4\pi R^2$, $\delta Q = -\sigma S 4 T_1^3 (T - T_1) dt$, $mc \frac{dT}{dt} + \sigma S 4 T_1^3 T = \sigma S 4 T_1^4$, $T = (T_0 - T_1) \exp -\frac{t}{\tau} + T_1$, $\tau = \frac{mc}{\sigma S 4 T_1^3}$, $m = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$ et $S = 4\pi R^2$ d'où $\tau \simeq 1\text{ h}$.

23. Constante de temps d'un thermomètre

Un thermomètre, de surface $S = 10\text{ cm}^2$ et de capacité thermique c , est placé dans un local vide d'air à la température $T_l = 300\text{ K}$. Le thermomètre est dirigé vers un des murs. On supposera que la face arrière de l'appareil (celle qui ne porte pas le thermomètre lui-même) est thermiquement isolée de la face avant qui porte l'appareil. On le retourne alors vers une vitre à travers laquelle il reçoit une fraction du rayonnement solaire, caractérisé par le flux surfacique $\phi = 100\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Sa température s'élève.

1. Déterminer les températures initiale et finale indiquées par le thermomètre.
2. Le passage de la température initiale à la température finale est achevé (à 90%) en 10 minutes. Déterminer c .

Réponses : 300 K et 315 K ; $c \frac{dT}{dt} + S\sigma T^4 = S(\sigma T_0^4 + \phi) = S\sigma T_f^4$, $c \frac{dT}{dt} + S\sigma 4 T_f^3 \Delta T = 0$, $c = 40\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

24. Utilisation thermique de l'énergie solaire

On étudie (cf. figure 1) un chauffe-eau solaire; l'eau y circule à vitesse constante v . L'absorbeur reçoit du Soleil la puissance par unité de surface Φ . Les transferts thermiques entre l'absorbeur et l'eau sont caractérisés par le coefficient de transfert pariétal h ; ceux de l'absorbeur et de l'air sont caractérisés par le coefficient h' . On note μ la masse volumique de l'eau supposée constante et c_{eau} sa capacité thermique massique.

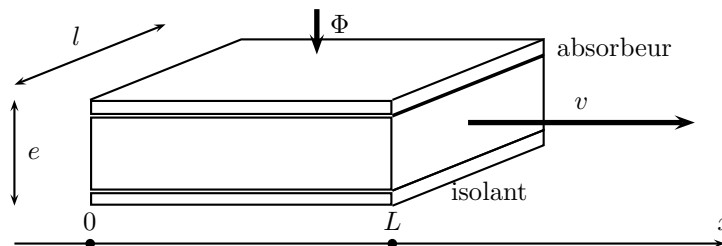


FIGURE 1 – Chauffe-eau solaire

La température de l'eau est notée $T(x, t)$. Les parois latérales et le fond du courant d'eau sont calorifugés.

1. On néglige la capacité thermique de l'absorbeur et on néglige les transferts thermiques par conduction dans l'absorbeur. Montrer que dans ces conditions, la température de l'absorbeur n'est fonction que de x , $T_a = T_a(x)$.
2. Expliciter un bilan thermique pour l'absorbeur puis pour une tranche d'eau de longueur dx ; en déduire une équation pour $T(x, t)$. On notera la température constante de l'air extérieur T_e , $T_a(x, t)$ celle de l'absorbeur et $T(x, t)$ celle de l'eau.
3. On se place en régime permanent. Déterminer $T(x)$ sachant que la température de l'eau à l'entrée du chauffe-eau solaire est T_0 .

Réponses : Pas d'accumulation d'énergie dans l'absorbeur, l'absorbeur élimine Φ uniquement par convection; $\Phi = h'(T_a(x) - T_e) + h(T_a(x) - T(x, t))$, $\mu c_{eau} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -v \mu c_{eau} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + h(T_a(x) - T(x, t))$; $v \mu c_{eau} \frac{dT}{dx} + \frac{hh'}{h+h'} T = \frac{\Phi + h' T_e}{h+h'}$, $T(x) = T_{max} + (T_0 - T_{max}) \exp -\frac{x}{\delta}$, $T_{max} = \frac{\Phi + h' T_e}{hh'}$, $\delta = v \mu c_{eau} \frac{h+h'}{hh'}$.

G. Thermodynamique du rayonnement

25. Étoiles de luminosité identique

On rappelle la loi de STEFAN du flux surfacique rayonné par un corps à la température T : $j_{ray} = \sigma T^4$. On imagine deux étoiles sphériques A et B de même luminosité (c'est-à-dire qu'elles émettent la même puissance lumineuse), mais dont les températures en surface varient du simple au double : $T_B = 2T_A$. Que peut-on dire du rayon de l'étoile B par rapport à celui de l'étoile A ?

Proposition de réponses :

- a) $R_B = 4R_A$ b) $R_B = 2R_A$ c) $R_B = R_A/2$ d) $R_B = R_A/4$

Réponses : la loi de STEFAN indique la puissance surfacique est donnée par $j_{ray} = \sigma T^4$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. La puissance émise par la surface de l'étoile est donc $P = \sigma T^4 4\pi R^2$. Si l'on raisonne à puissance constante, on doit donc avoir $R^2 T^4 = \text{Cte}$. On en déduit que $R_B = R_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2$. Comme la température sur B est deux fois plus élevée que sur A , on en déduit que $R_B = R_A/4$. Réponse d).

26. Méthode de Boltzmann

Un gaz de photons est en équilibre thermique à la température T à l'intérieur d'un récipient fermé de volume V , réglable au moyen d'un piston mobile sans frottement. L'énergie interne de ce gaz s'écrit $U = V\bar{u}$ où l'énergie interne volumique $\bar{u}(T)$ ne dépend *a priori* que de la température T .

Pour chaque photon, la vitesse c , l'impulsion (ou quantité de mouvement) q et l'énergie ϵ sont reliés par la relation relativiste $q = \|\vec{q}\| = \epsilon/c$. Le choc des photons sur les parois est élastique.

1. Montrer que la pression statistique p exercée par le gaz sur les parois est $p = \bar{u}/3$. Comparer au cas d'un gaz parfait monoatomique.
2. Au cours d'une transformation infinitésimale réversible, exprimer dU , le travail δW et le transfert thermique δQ puis la variation dS de l'entropie du gaz.
En déduire l'expression de $\bar{u}(T)$ (à une constante multiplicative près). Commenter.
3. On appelle *énergie libre* F d'un système la grandeur $F = U - TS$.
Évaluer la variation dF d'énergie libre au cours d'une transformation réversible.
En déduire à nouveau l'expression de $\bar{u}(T)$ déjà trouvée.
4. On envisage le comportement de l'univers primordial (au début de son expansion) comme celui d'un gaz de photons en évolution adiabatique. En déduire la nature de la relation entre T et V . Commenter.

Réponses : Lors d'un choc la quantité de mouvement varie de $2q$, la force subie par une surface dS est : $dF = \frac{d^2 p}{dt}$ avec $d^2 p = \frac{1}{6} n c dS dt (2q)$ où $n = \frac{N}{V}$ est la densité volumique de particules, $dF = \frac{nqc}{3} dS$ d'où $p = \frac{nqc}{3} = \frac{n\epsilon}{3} = \frac{1}{3} \bar{u}$, $p = \frac{n'RT}{V}$ et $U = n' \frac{3}{2} RT$, $p_{GP} = \frac{2}{3} \bar{u}$, $\delta W = -\frac{\bar{u}}{3} dV$, $dU = V d\bar{u} + \bar{u} dV$, $\delta Q = \frac{4}{3} \bar{u} dV + V d\bar{u}$, $dS = \frac{4\bar{u}}{3T} dV + \frac{V}{T} d\bar{u}$, $d\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dT} dT$, égalité des dérivées secondes croisées $\frac{4}{3} \left[\frac{T \frac{d\bar{u}}{dT} - \bar{u}}{T^2} \right] = \frac{1}{T} \frac{d\bar{u}}{dT}$, $\frac{d\bar{u}}{dT} - 4 \frac{\bar{u}}{T} = 0$, $\bar{u} = KT^4$, $dF = -pdV - SdT$, $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T$, $\frac{1}{3} \frac{d\bar{u}}{dT} = \frac{4}{3} \frac{\bar{u}}{T}$ même résultat pour $\bar{u}(T)$, $\delta Q = 0$, $4 \frac{dV}{V} + 3 \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = 0$, $T^3 V = K'$, la température diminue en $V^{-1/3}$ lorsque le volume augmente, l'univers se refroidit, V évoluant en R^3 où R est le rayon de l'univers, on a $RT = K''$.