

LP22 – RÉTROACTION ET OSCILLATIONS

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L2-PSI

Extraits du programme (PSI)

Rétroaction

Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie, une saturation de l'intensité de sortie.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.

Compromis gain/bande passante d'un système bouclé du premier ordre.
Limite en fréquence du fonctionnement linéaire.

Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime linéaire.

Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime saturé.

quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'identification de certains montages à des systèmes bouclés permet de faire le lien avec le cours d'automatique de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est uniquement évoquée en TP afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.

Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse.

Représenter les relations entre les tensions d'entrée et de sortie par un schéma fonctionnel associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel. Analyser la stabilité du régime linéaire.

Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur.

Identifier la manifestation de la vitesse limite de balayage d'un ALI dans un montage.

Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Exprimer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt d'une forte impédance d'entrée et d'une faible impédance de sortie pour une association en cascade.

Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Pour une entrée sinusoïdale, faire le lien entre la non linéarité du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.

Oscillateurs

Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.

Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis. Générateur de signaux non sinusoïdaux.

étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les fonctions de transfert des filtres utilisés sont fournies. En TP, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.

Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. Réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal et mettre en évidence la distorsion harmonique des signaux par une analyse spectrale. Approche documentaire : en relation avec le cours sur les ondes, décrire le fonctionnement d'un oscillateur optique (laser) en termes de système bouclé auto-oscillant. Relier les fréquences des modes possibles à la taille de la cavité.

Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer la période d'oscillation. Réaliser un oscillateur de relaxation et effectuer l'analyse spectrale des signaux générés.

Commentaires du jury

- **2015** : Dans le cas des oscillateurs auto-entretenus, les conditions d'apparition des oscillations et la limitation de leur amplitude doivent être discutées. Le jury souhaiterait que le terme de résonance soit dûment justifié sans oublier une discussion du facteur de qualité. Il n'est pas indispensable de se restreindre à l'électronique.
- **2009-2013** : Le jury n'attend pas une présentation générale et abstraite de la notion de système bouclé. Il estime indispensable de s'appuyer sur au moins un exemple concret et détaillé avec soin.
- **2007** : La stabilité des systèmes bouclés est mal comprise. Le bouclage ne se limite pas uniquement à une fonction d'asservissement. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important.

Bibliographie

- ↗ *Electronique PSI, Précis Bréal*, **Brenders** → Contenu
- ↗ *Electronique I (pas juste Electronique)*, **Brébec** → Compléments et exercices
- ↗ *Expériences d'électronique*, **Duffait** → Un peu d'asservissement et d'oscillateur à pont de Wien
- ↗ *Electronique expérimentale*, **Krob** → Compléments sur l'asservissement, très bien pour les oscillateurs et le critère de Nyquist
- ↗ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** → LASER
- ↗ *Introduction à l'optique quantique*, **Fox** → Compléments pour le laser
- ↗ <http://www.lirmm.fr/~chemori/Temp/Leila/automatique-systemes-lineaires-et-non-lineaires.pdf>, **Guyon** → Très utile pour bien comprendre la leçon

Prérequis

- AO
- fonction de transfert
- un cours de SI
- transformées de Laplace et de Fourier

Expériences



Table des matières

1	Systèmes bouclés linéaires	4
1.1	Fonction de transfert	4
1.2	Exemple : l'amplificateur non inverseur	6
2	Effets de la rétroaction	7
2.1	Stabilité	7
2.2	Gain et bande passante	9
2.3	Réponse dynamique	9
2.4	Influence quantitative du facteur de qualité sur le dépassement	10
2.5	Sensibilité aux fluctuations	11
3	Oscillateurs quasi-sinusoïdaux	11
3.1	Critère de Barkhausen	12
3.2	Laser et système bouclé	12
3.3	Naissance des oscillations : le pont de Wien	13
3.4	Principe de l'oscillateur	13
3.5	Étude en boucle ouverte (facultatif)	14
3.6	Condition d'oscillation du système bouclé (rapide)	14
3.7	Croissance des oscillations	15
3.8	Différents oscillateurs	16
3.8.1	Colpitts	16
3.8.2	Quartz	17
3.8.3	PLL	17

Introduction

Pour l'instant, nous nous sommes restreints à l'étude de systèmes linéaires en électronique. La sortie dépend linéairement de l'entrée via une équation différentielle et on peut transformer cette équation en notation complexe pour obtenir une fonction de transfert, donnée en notation de Laplace par

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} \quad \text{avec} \quad p = j\omega$$

Ainsi, une entrée donnée donne en théorie une sortie unique si on suppose que H est parfaitement connue, ce qui n'est pas forcément le cas. Par exemple, la fonction de transfert reliant la puissance fournie par le moteur d'une voiture à la vitesse de rotation des roues dépend de nombreux paramètres (pente de la route, état de la route,...) et il est donc difficile de la connaître précisément.

Ces imprécisions sur la connaissance de H impliquent que de tels systèmes ne puissent pas garantir une sortie conforme à ce que l'on veut. Pour remédier à ce problème, on utilise souvent des **boucles de rétroaction** qui fait réagir le système si la sortie n'est pas conforme à ce qu'on attend. Dans le cas de la voiture, un exemple de système rétroactif est le régulateur de vitesse.

Rappels sur l'AO

Déjà, il faut l'appeler "amplificateur linéaire intégré" (ALI) pour faire plaisir au jury.

Fonctionnement de l'animal

➤ Bréal PSI

➤ https://fr.wikipedia.org/wiki/Amplificateur_opérationnel

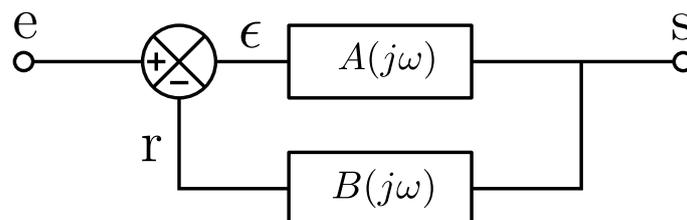
Les montages de base

➤ https://fr.wikipedia.org/wiki/Montages_de_base_de_l'amplificateur_opérationnel

1 Systèmes bouclés linéaires

➤ Guyon chap5

1.1 Fonction de transfert



Un système bouclé est constitué d'une chaîne linéaire donc la sortie est récupérée et envoyé dans la boucle de retour pour être comparée à l'entrée.

Remarque

Les signes - et + montrent qu'on a un comparateur et non pas un additionneur. Cependant, on peut quand même utiliser un additionneur si on inverse la boucle de retour pour faire apparaître un facteur -1.

Avec les mains, on peut expliquer la rétroaction en supposant qu'on a une sortie trop grande par rapport à ce qu'on attend. $A(p)$ et $B(p)$ induiront alors une rétroaction négative importante via la boucle de retour, ce qui va alors diminuer la sortie et la stabiliser à une valeur inférieure, plus conforme à ce qu'on attend.

Ce qu'on veut, c'est la fonction de transfert du système. Puisqu'on attend toujours que s soit linéaire en e même avec la rétroaction, on peut modéliser le système bouclé par une seule fonction de transfert $H(p)$ et donc le considérer comme une boîte noire de gain $H(p)$.

$$s(p) = A(p)\epsilon(p) = A(p)[e(p) - B(p)s(p)] \Rightarrow s(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}e(p) \quad (1)$$

avec $A(p), B(p) \in \mathbb{C}$. La fonction de transfert vaut donc

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad (2)$$

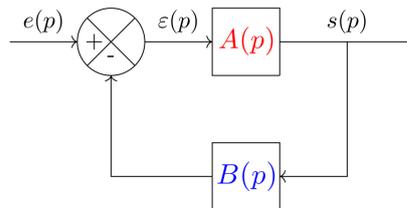
Notons que $H(p)$ correspond à la boucle fermée tandis que $A(p)B(p)$ correspond à la boucle ouverte. On peut écrire $H(p)$ sous la forme

$$\begin{aligned} H(p) &= \{\text{chaîne directe (sans retour)}\} \times \{\text{correction du retour}\} \\ &= A(p) \times \frac{1}{1 + A(p)B(p)} \end{aligned} \quad (3)$$

Pour un retour faible, $B(p)s(p) \ll e(p)$ donc $H(p) \simeq A(p)$.

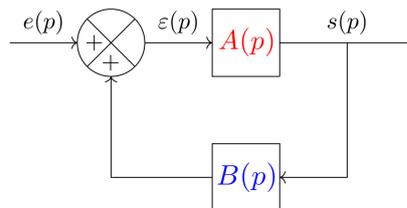
Une dernière remarque, il existe 2 types de rétroactions :

- la rétroaction **négative** : c'est le cas qu'on vient d'étudier, à savoir $\epsilon(p) = e(p) - B(p)s(p)$



$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

- la rétroaction **positive** : c'est le cas où $\epsilon(p) = e(p) + B(p)s(p)$

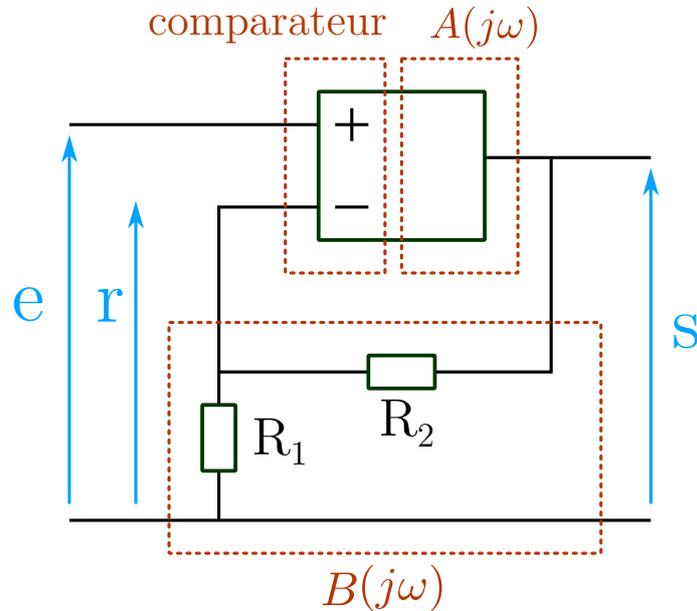


$$H(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$$

↓ Prenons un exemple.



1.2 Exemple : l'amplificateur non inverseur



Pour commencer, rappelons qu'en fonctionnement, la réponse de l'ALI est :

$$s(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{ALI}}} [e_+(p) - e_-(p)] \quad (4)$$

L'ALI peut donc être vu comme un comparateur $[e_+(p) - e_-(p)]$ suivi d'un passe bas $\frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{ALI}}}$ de gain statique μ_0 et de pulsation de coupure ω_{ALI} .

Ordres de grandeurs

$\mu_0 = 2 \times 10^5$ et $\omega_{ALI} = 50 \text{ rad s}^{-1}$ (donc $f_{ALI} = 8 \text{ Hz}$), ce qui donne un produit gain-bande d'environ 10^6 .

Intéressons-nous maintenant au système bouclé. Le théorème de Millman nous permet de calculer la sortie en fonction de l'entrée, mais on n'en a pas besoin ici. En effet, on identifie l'ALI à la chaîne directe de gain $A(p)$ et les 2 résistances à la chaîne de retour de gain $B(p)$. On a donc

$$A(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{ALI}}} \quad \text{et} \quad B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

On remplace $A(p)$ et $B(p)$ dans l'expression de $H(p)$ démontrée précédemment pour obtenir

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \\
 &= \frac{\frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{\text{ALI}}}}}{1 + \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{\text{ALI}}}} \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{\text{ALI}}} + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \\
 &= \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{\text{ALI}} \left[1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right]}}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Finalement, on écrit $H(p)$ sous la forme

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \\ \omega_0 = \omega_{\text{ALI}} \left[1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right] \simeq 10^5 - 10^6 \text{ Hz} \end{cases} \tag{6}$$

↓ Quelles sont les conséquences de la boucle de rétroaction sur les caractéristiques du système ?
↓

2 Effets de la rétroaction

2.1 Stabilité

Considérons un système bouclé général mais avec une rétroaction **positive**. Alors $H(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$, ou plutôt $[1 - A(p)B(p)]s(p) = A(p)e(p)$. On se place alors en **régime libre**, *i.e.* $e(p) = 0$, l'équation de fonctionnement vaut

$$1 - A(p)B(p) = 0$$

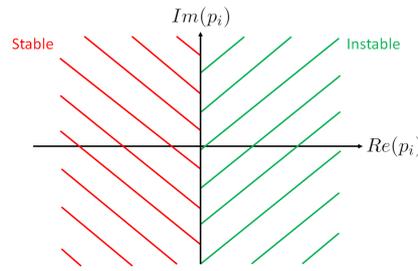
Les solutions p_i de cette équation peuvent être décrites comme étant les racines d'un polynôme qui vérifie

$$1 - A(p)B(p) = \sum_{i=1}^n b_i (p - p_i)^{k_i}$$

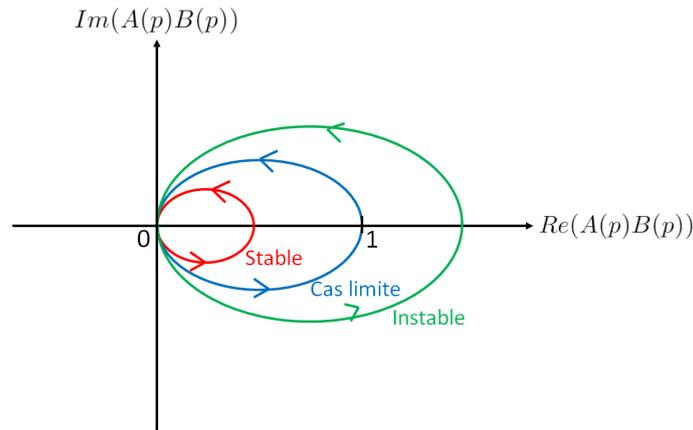
On peut alors exprimer la solution en temporel :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(p_i t)$$

où les p_i sont les racines complexes de $1 - A(p)B(p)$ et les $a_i(t)$ sont des polynômes de degré maximum $k_i - 1$. La solution p_i est alors **instable** si $\Re(p_i) > 0$.



Cependant, il peut être difficile de calculer les solutions p_i . On utilise donc une représentation plus visuelle : le **diagramme de Nyquist**, donc lequel on trace $\Im[A(p)B(p)]$ en fonction de $\Re[A(p)B(p)]$ **en boucle ouverte**.



(7)

Quand on écrit $H(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$, on voit qu'on a un problème pour $A(p)B(p) = 1$. On peut donc établir un critère d'instabilité purement géométrique :

Un système à rétroaction **positive** est instable si sa trajectoire dans le diagramme de Nyquist entoure le point $(1,0)$.



Vérification des conditions d'oscillation

MP27



reprendre en vitesse cette manip pour présenter les diagrammes de Nyquist.

On peut se demander ce qu'il se passe pour une rétroaction négative. Dans ce cas, $H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$ et donc le problème a lieu quand $A(p)B(p) = -1$. Ainsi, le système serait instable si sa trajectoire dans le diagramme de Nyquist entourait le point $(-1,0)$. Cependant, cela reviendrait en pratique à avoir un gain négatif, ce qui n'est vraiment pas courant.

↓ Dans le reste de cette section, on se placera dans le cadre de la rétroaction **négative**.



2.2 Gain et bande passante

Reprenons de nouveau l'exemple de l'amplificateur non inverseur. On avait établi

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \\ \omega_0 = \omega_{\text{ALI}} \left[1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right] \simeq 10^5\text{-}10^6 \text{ Hz} \end{cases}$$

On remarque qu'on est dans le cas d'un système bouclé avec un grand gain en chaîne directe, *i.e.* au niveau de l'ALI. On a en effet $\mu_0 \simeq 2 \times 10^5 \gg 1$ donc on peut écrire

$$H(p) \simeq \frac{1}{B(p)}$$

Le gain ne dépend presque que de la boucle de retour. Comme son nom l'indique, l'amplificateur non inverseur sert à amplifier (thank you Captain Obvious) donc on choisit des résistances telle que $B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \ll 1$.

Prenons par exemple $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$. Alors $B(p) \simeq \frac{1}{100}$ donc $H_0 \simeq 100$. En chaîne directe, on avait $\mu_0 \simeq 2 \times 10^5$. La rétroaction a donc réduit le gain d'un facteur $\frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} = 2000$!

Remarquons cependant que la pulsation de coupure a été quant à elle multipliée par un facteur $1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} = 2000$ pour atteindre $\omega_0 \simeq 10^5 \text{ rad s}^{-1}$ (donc $f_0 = 16 \text{ kHz}$).

Le produit gain \times bande passante est **constant**.

La boucle de rétroaction permet donc d'augmenter la bande passante au prix d'une diminution de gain.

2.3 Réponse dynamique

Abandonnons l'amplificateur non inverseur 5 minutes, et demandons nous en toute généralité quelle influence peut avoir la rétroaction sur la réponse dynamique. Pour l'étudier, nous allons utiliser l'outils classique de la réponse à un échelon de tension comme commande.

On a vu que pour les systèmes d'ordre 1, le temps de réponse est donné par $\tau = \frac{1}{\omega_0}$. Le but de la rétroaction est de le réduire, et donc d'accroître la rapidité du système. Cependant, on l'a vu avec les filtres passifs d'ordre 2, la rapidité a un prix, que nous allons détailler.

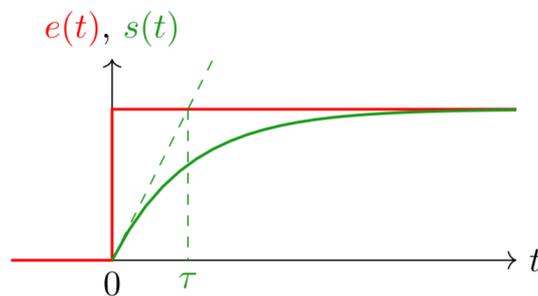


FIGURE 1 – Un régime transitoire typique d'un système d'ordre 1.

MCC asservie et dépassement

⚡ MP27

⊖

BUT : Illustrer le prix à payer, à savoir le **Dépassement de commande**.

On met un échelon de tension et on voit les oscillations du moteur.

On a vu, avec le RLC (⚡ leçon électrocinétique) que plus la réponse est rapide (*i.e.* plus l'égalité commande=sortie est vite vérifiée), plus le dépassement est grand, il est d'ailleurs caractérisé par le facteur d'amortissement ξ . Cela peut bien sûr poser des problèmes en ingénierie, puisqu'un robot qui dépasse sa commande c'est potentiellement un danger pour la sécurité des travailleurs autour.

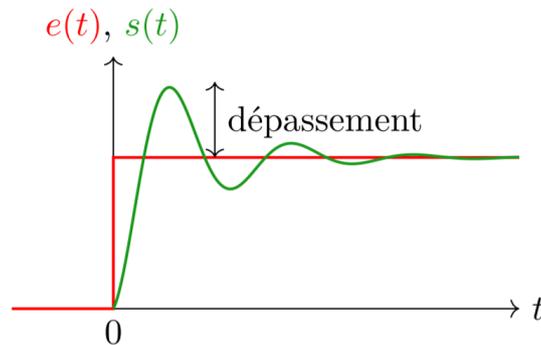


FIGURE 2 – Régime transitoire d'un système d'ordre 2.

L'exemple typique d'un système qu'on veut qu'il réagisse vite mais qu'on veut pas qu'il dépasse c'est le **régulateur de vitesse** d'une voiture.

2.4 Influence quantitative du facteur de qualité sur le dépassement

⚡ LP00 – électrocinétique, filtres d'ordre 2

⚡ <http://www.lirmm.fr/~chemori/Temp/Leila/automatique-systemes-lineaires-et-non-lineaires.pdf>

Pour résumer, on peut écrire l'équation différentielle d'un système bouclé linéaire d'ordre 2 à rétroaction négative comme

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + s(t) = K e(t) \quad (8)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1} \quad (9)$$

Le facteur d'amortissement ξ nous indique à quel point le système est amorti. On étudie la réponse indicielle, *i.e.* la réponse à $E(p) = \frac{1}{p}$, et par transformée de Laplace inverse on obtient directement :

⚡ le poly p.70 (en réalité 84eme page du bouquin).

On peut alors définir trois régimes en fonction de la valeur de ξ :

- Régime amorti
- Régime critique

- régime oscillatoire amorti

C'est ce dernier qui nous intéresse dans le cadre d'une leçon sur les oscillations. On peut alors y définir la pseudo période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (10)$$

Pour plus de détails, regarder les références.

2.5 Sensibilité aux fluctuations

Une question que l'on peut également se poser sur ce type de système est sa capacité à répondre à une fluctuation. Par exemple on peut imaginer une voiture roulant au régulateur sur une route qui monte et descend. Est-ce que la vitesse va en être fortement affectée ? Est-ce que les dépassements sont toujours faibles ?

On suppose que ce qui fluctue c'est $A(p)$, et que ses fluctuations sont de la forme $\Delta A(p)$. On suppose que B ne fluctue pas. On a toujours $H = \frac{A}{1 + AB}$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta A(1 + AB - AB\Delta A)}{(1 + AB)^2} \times \frac{1 + AB}{A} = \frac{\Delta A}{A} \frac{1}{1 + AB} \quad (11)$$

Comparons ceci aux fluctuations en chaine directe : on a $H_d = A$, et par conséquent $\Delta H_d/H_d = \Delta A/A$. On a donc ici réduit les fluctuations de la commande par un facteur $1 + AB$. Pour un système avec un grand gain en chaine directe (*i.e.* un amplificateur, 2000 pour l'ali), on a une forte réduction des fluctuation, ce qui est plutôt pratique !

Dans le cadre des grandes fluctuations, qui est un cas limite toujours intéressant, pour une chaine directe on a de grandes fluctuation, pour un système bouclé on a une très forte atténuation. Pour un ali avec une chaine directe $|AB| \sim 2000$, $\Delta H/H \simeq 0.05\%$.

3 Oscillateurs quasi-sinusoidaux

On se place dans cette section dans le cadre de la rétroaction **positive**.

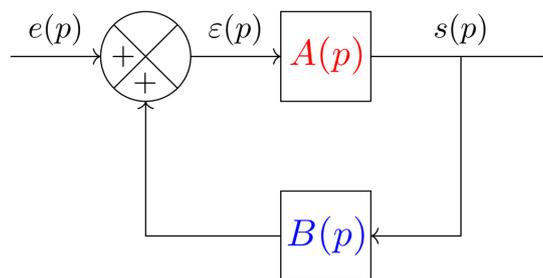


FIGURE 3 – Rétroaction positive

La fonction de transfert est donc

$$H = \frac{A}{1 - AB} \quad (12)$$

3.1 Critère de Barkhausen

Le critère de Barkhausen est une évaluation rapide de la stabilité d'un système. On cherche les racines imaginaires pures de $1 - AB$ afin de faire diverger H , c'est à dire les pôles imaginaires purs de H .

$$A(j\omega)B(j\omega) = 1 \quad (13)$$

Le critère de Barkhausen est alors

$$\begin{cases} |A||B| = 1 \\ \arg(A) + \arg(B) \equiv 0 [2\pi] \end{cases} \quad (14)$$

Il s'agit du critère à satisfaire pour obtenir un oscillateur. On peut l'appliquer par exemple au laser.

3.2 Laser et système bouclé

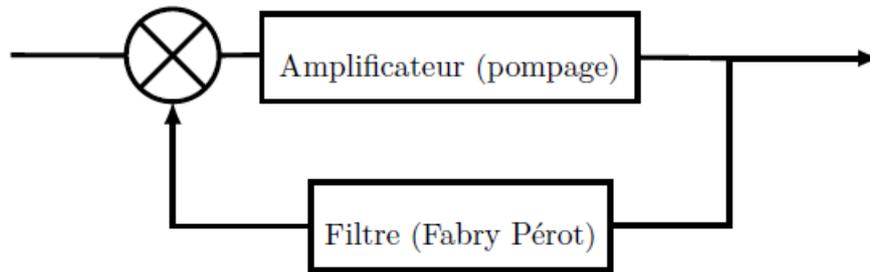


FIGURE 4 – Schéma block du laser

On rappelle vite fait le principe : avec une source d'énergie extérieure on effectue un échange de population entre deux niveaux énergétiques pour forcer l'émission stimulée à une certaine fréquence sélectionnée par un filtre (un FP). Le rayonnement émis par émission stimulée continue ensuite à forcer l'échange de population ce qui entretient le fonctionnement du LASER.

Définition : Oscillateur auto-entretenu

Un oscillateur auto-entretenu est un générateur (filtre + milieu amplificateur) délivrant un signal périodique tout en étant alimenté par une source d'énergie continue, et en l'absence de tout signal périodique extérieur.

Bien expliquer en quoi le LASER illustre parfaitement ça et dire que grâce au filtre on a même un oscillateur quasi-sinusoidal. Mais d'ailleurs c'est quoi le signal d'entrée d'un LASER avant qu'une première boucle ne soit lancée et que le filtre ait agit en rétroaction ? Et bien ce sont les émissions spontanées qui vont lancer la boucle ! Ces émissions spontanées créent un signal d'une très faible amplitude (on parle de bruit), bien plus faible que le signal que l'on veut en sortie du LASER.

Les fonctions de transfert du laser sont les suivantes :

- milieu amplificateur, atomes excités électriquement, $G = g(\omega) \exp\left(i\frac{\omega\ell_a}{c}\right)$ avec ℓ_a la largeur de la cavité. Un aller-retour fera donc

$$A = g^2 \exp\left(2i\frac{\omega\ell_a}{c}\right) \quad (15)$$

- cavité optique FP de largeur ℓ avec un miroir parfait et un semi réfléchissant (r).

$$B = r \quad (16)$$

On a alors pour la condition de Barkhausen

$$\begin{cases} rg^2 = 1 \\ \omega = n \frac{\pi c}{\ell} \end{cases} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

☞ courbes sympas dans le Fox p73, LP37

Le bouclage du système est donc à l'origine de la quasi-monochromaticité du laser, donc de sa cohérence temporelle.

Remarque : dans la vraie vie on a pas une divergence, parce qu'on n'a pas une énergie infinie, qu'on a des phénomènes de non linéarité, de saturation. On a illustrer ce principe un peu mieux avec le pont de Wien.

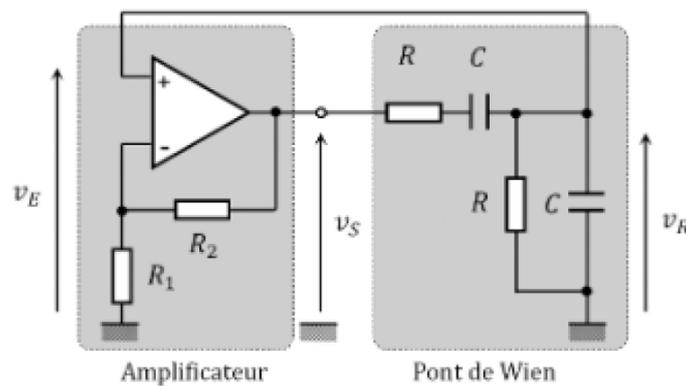
Mettons ce critère en application avec cet oscillateur électronique. Puisqu'on n'apporte pas de périodicité en entrée, comment se forment les oscillations ? Sous quelles conditions ?



3.3 Naissance des oscillations : le pont de Wien

☞ MP27

3.4 Principe de l'oscillateur



La fonction de transfert de l'amplificateur et du filtre sont respectivement :

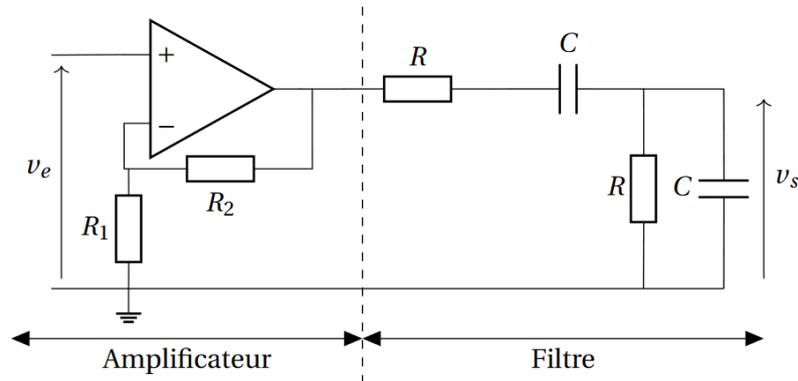
$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (18)$$

Pour le choix des paramètres, on a $Q = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, et globalement, pour que ça marche bien on prend $R_1 = R = 1 \text{ k}\Omega$, et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Il est malin de mettre une boîte à décades sur R_2 .

On voit que la boucle de retour c'est le filtre, et la rétroaction est positive.

3.5 Étude en boucle ouverte (facultatif)

Objectif : tracer le diagramme de Bode du circuit en boucle ouverte pour caractériser ω_0 et Q . Easy ?



$$H = AB = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (19)$$

Diagramme de Bode (facultatif)



⊖ 3mn

On trace en préparation le diagramme, devant le jury on fait juste un vieux sweep des familles.

Bode pour $R_2 = 2.1$ et $1.9 \text{ k}\Omega$.

Remonter à ω_0 et Q par régression. La bande passante à -3dB donne Q , la phase nulle donne ω_0 .

3.6 Condition d'oscillation du système bouclé (rapide)

Pour établir les conditions d'oscillation du système bouclé, on annule le dénominateur de sa fonction de transfert : $AB = -1$, de manière à faire diverger le gain et ainsi permettre l'apparition des oscillations - le système est rendu instable. La résolution de cette équation mène à deux conditions (dites de Barkhausen) :

$$s = A(e + Bs) \Rightarrow s = \frac{A}{1 - AB}e$$

$$\begin{cases} R_2 = 2R_1 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La première impose que les oscillations ne sont possibles que si la chaîne directe amplifie suffisamment le signal pour avoir un gain de 1. En pratique, cette condition est nécessaire pour que les oscillations naissent mais n'est pas suffisante pour qu'elles se maintiennent ; on retiendra que pour qu'elles s'établissent durablement il faut : $R_2 > 2R_1$.

La deuxième condition stipule que les oscillations qui s'établissent dans le système bouclé sont les oscillations du régime libre de la chaîne de retour, elles ont donc une fréquence égale à la fréquence de résonance du filtre passe-bande. On peut vérifier expérimentalement ces deux conditions.

Vérification des conditions d'oscillation



Enlever le GBF du circuit et boucler la sortie sur l'entrée.

- Condition n°1 : Pour $R_2 < 2 \text{ k}\Omega$, constater que les oscillations peinent à s'établir, puis augmenter R_2 jusqu'à ce qu'elles se maintiennent. Déterminer un encadrement à l'ohm près de la valeur de la résistance critique qui correspond à la condition d'oscillation. Mesurer les valeurs de R_c^+ et R_c^- à l'ohmmètre en les sortant du circuit. En déduire $R_c = (R_c^+ + R_c^-)/2$. L'incertitude sur R_c s'obtient en sommant quadratiquement le demi-écart $(R_c^+ - R_c^-)/2$ et l'incertitude de l'ohmmètre. Comparer à la valeur attendue $R_c = 2R_1$ (la valeur attendue a elle aussi une incertitude qui provient de la mesure de R_1 à l'ohmmètre).
- Condition n°2 : Pour une valeur de R_2 supérieure à R_c , visualiser les oscillations à l'oscilloscope. On peut alors soit directement mesurer la fréquence au fréquence-mètre, soit la déduire d'une mesure de période à l'aide des curseurs sur l'oscilloscope. Dans le premier cas l'incertitude est celle du fréquence-mètre, dans l'autre elle est dominée par l'incertitude sur le positionnement des curseurs.

Comparer ces deux valeurs aux valeurs attendues, ça doit rentrer dans les barres d'incertitudes.

Une autre manière de formuler la condition d'oscillation consiste à utiliser le critère d'instabilité de Nyquist, qui stipule qu'un système bouclé est instable si le diagramme de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte entoure le point $(-1; 0)$. (**Aller voir les hypothèses !**)

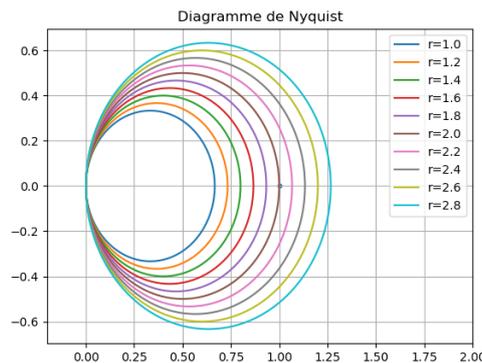


Numérique : tracer les diagrammes de Nyquist



Avec les points déjà acquis pour le diagramme de Bode, on trace les diagrammes de Nyquist correspondant aux trois valeurs de résistance précédentes.

On trace $\text{Im}(H)$ fonction de $\text{Re}(H)$, et bam. CF ci-dessous, r est le rapport des résistances.



3.7 Croissance des oscillations

➤ Benders p.244, Krob p.133

But : Retrouver la croissance exponentielle des oscillations naissantes.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3-A}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 \exp\left(-\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)\omega_0 t\right) \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (20)$$

On retrouve bien des oscillation naissante pour $R_2 > 2R_1$. En vrai le signal ne continue pas à diverger car le gain de l'ampli op est limité... La saturation des oscillations correspond à la saturation de l'ampli.



Croissance des oscillation



⊖ 5mn

Après avoir introduit le détecteur de crête en sortie du montage, faire une acquisition de la croissance des oscillations sous Latis-Pro. Pour cela, court-circuiter R_2 avec un fil, régler le seuil de déclenchement à 10 mV avec un pré-trig à 0% et ôter le court circuit après avoir lancé l'acquisition.

Cela revient à introduire instantanément R_2 dans le circuit et donne un signal plus propre. Faire une modélisation affine de $\ln s(t)$. On obtient $-\alpha\omega_0 t$, avec $\alpha = 2 - \frac{R_2}{R_1}$.

Répéter ceci pour plusieurs valeurs de $R_2 > 2R_1$ et tracer α en fonction de R_2 . Comparer la pente de la droite obtenue à $1/2R_1$.

3.8 Différents oscillateurs

On voit très vite que si on dépasse le critère de Barkhausen, les oscillations ne sont plus sinusoïdales. La sortie est enrichie spectralement. Ceci est possible grâce aux non-linéarités : elles permettent de dépasser le critère de Barkhausen en compensant les pertes énergétiques mais alors on perd en précision spectrale. Notons que le formalisme précédent avec les fonctions de transfert et les blocs n'a plus aucun sens si c'est plus linéaire.



Enrichissement spectral



⊖

Montrer que l'on a un enrichissement spectral.

Un bon oscillateur c'est donc un truc qui créer un signal bien monochromatique, donc caractérisé par un bon facteur de qualité (il porte pas son nom pour rien le bougre!). Ici on a $Q = 1/3$, c'est bof, dès qu'on dépasse un tout petit peu le critère de B les oscillations sont dégueu. Mais avec d'autres oscillateurs on peut atteindre de bien meilleurs facteurs de qualité.

3.8.1 Colpitts

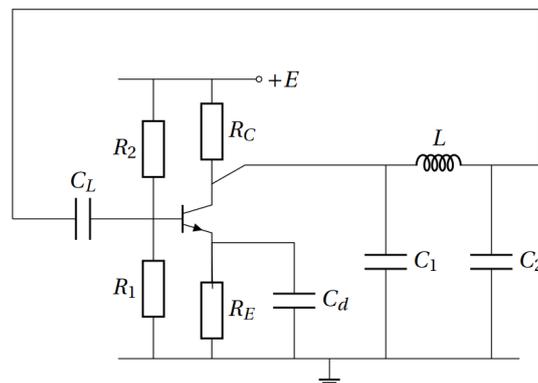


FIGURE 5 – Oscillateur de Colpitts, de facteur de qualité réglable, croissant avec L .

3.8.2 Quartz

On peut alors utiliser du quartz qui peut être assimilé à une inductance propre $L \sim 100 \text{ H}$, ce qui va nous donner un facteur de qualité $Q \sim 50000$.

3.8.3 PLL

Parler de la PLL (boucle à verrouillage de phase) si il reste du temps. ↻ Hprépa exo 5 p.175 ou alors ne pas en parler parce que c'est ÉCLATÉ AU SOL et parce que de toutes façons, monter une PLL par visio c'est pas facile

Conclusion

Asservissement en rétroaction négative, oscillations en rétroaction positive.

Minimum ordre 2 pour faire des oscillations.