

# LP24 – ONDES PROGRESSIVES, ONDES STATIONNAIRES

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

## Niveau : L2

### Commentaires du jury

- 2015 : Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui, d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles.  
*Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples de phénomènes de propagation unidimensionnels. Ondes progressives, ondes stationnaires. Aspects énergétiques.*
- 2009 : Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
- 2008 : Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.
- 2006 : Pour éviter de répéter de lourds calculs, il est recommandé de développer les analogies entre les différents exemples. Il faut également consacrer du temps à des notions plus concrètes ainsi qu'à l'aspect énergétique, souvent sacrifié. 2005 : Une onde stationnaire n'est pas forcément résonante. 1999 : Les notions d'onde progressive, d'onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l'onde stationnaire de l'onde stationnaire résonante dans un système fermé.

## Bibliographie

- ⚡ N'importe quel livre de prépa → la base de la leçon
- ⚡ *Ondes*, **Brébec**, **Hprépa** → Le câble coaxial
- ⚡ *Berkeley, cours de physique, 3. Ondes*, **Crawford** → Pour une vision plus générale.
- ⚡ *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome 1. Mécanique*, **Quaranta** → Référence pour la corde de Melde (Garing sinon)

## Prérequis

- Électronique
- Mécanique du point
- Fourier

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Équation de propagation par l'exemple</b>	<b>3</b>
1.1	Définition d'une onde . . . . .	3
1.2	Exemple de la corde vibrante . . . . .	3
1.3	Équation des télégraphistes . . . . .	5
1.4	Câble coaxial modèle . . . . .	5
1.5	Points communs et analogies . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Onde progressive</b>	<b>7</b>
2.1	Définitions . . . . .	7
2.2	Résolution de l'équation d'onde . . . . .	7
2.3	Les ondes planes progressives harmoniques . . . . .	9
2.4	Retour au câble coaxial : notion d'impédance propagative . . . . .	9
2.5	Aspect énergétique . . . . .	9
2.6	Ondes sphérique . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Onde stationnaire</b>	<b>11</b>
3.1	Des ondes progressives aux ondes stationnaires . . . . .	12
3.2	Lien mathématique entre les deux types d'ondes . . . . .	12
3.3	Propriétés de l'onde stationnaire . . . . .	13
3.4	Instruments de musique . . . . .	13
3.5	Aspect énergétique . . . . .	14
3.6	Application à la musique . . . . .	14

## Introduction

Cette leçon se place au niveau PC, mais on peut aussi la placer au niveau L1 si on s'y prend bien.

On a déjà étudié en terminale/première les ondes de manière qualitative. On a notamment vu la propagation à une vitesse connue de proche en proche comme transfert d'énergie sans transport de matière. Aujourd'hui nous allons cadrer proprement les mathématiques des ondes et montrer que cette notion couvre de nombreux domaines de la physique.

## 1 Équation de propagation par l'exemple

### 1.1 Définition d'une onde

Mathématiquement, une onde est un champ dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielles. Usuellement, c'est la propagation d'une perturbation dans l'espace au fil du temps.

La deuxième définition est (à peu près) celle de Wikipédia, et en fait elle correspond à l'intuition qu'on en a, mais le but de cette leçon est (entre autre) justement de montrer qu'une telle définition est trop restrictive car elle ne prend pas en compte un type d'onde, les ondes stationnaires.

### 1.2 Exemple de la corde vibrante

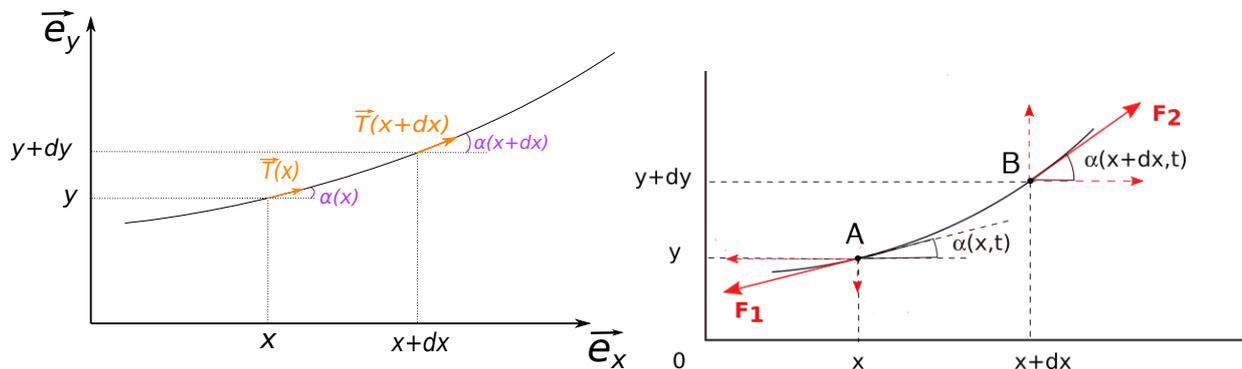


FIGURE 1 – Tronçon d'une corde.

Étudions le système {tronçon de longueur  $dx$ } dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le modèle que l'on prend ici est très simplifié :

- 1D, sans raideur, inextensible, inélastique
- suffisamment tendue pour négliger son poids
- homogène, avec une masse linéique  $\mu = \frac{m}{L}$
- dans la limite des petites perturbations autour du repos ( $y(x, t) \ll L$ )

**OdG** :  $L$  de l'ordre du m,  $\mu \sim 1$  g/m, et la tension vaut quelques Newton. (on vérifie bien que  $T \gg mg$ .)

**PFD** :

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B = \mu dx \vec{a}$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération.

**Projection** sur l'axe  $x$  :

$$-T_A \cos \alpha(x, t) + T_B \cos \alpha(x + dx, t) = 0$$

car il n'y a pas de déplacement horizontal donc pas accélération.

**Projection** sur l'axe  $y$  (avec  $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  la composante verticale de l'accélération).

$$-T_A \sin \alpha(x, t) + T_B \sin \alpha(x + dx, t) = \mu dx a_y$$

Comme on s'intéresse à de petites variations d'angles, on peut linéariser à l'ordre 1. Les deux équations précédentes deviennent alors

$$\begin{cases} -T_A + T_B = 0 \\ -T_A \alpha(x, t) + T_B \alpha(x + dx, t) = \mu dx a_y \end{cases} \implies \begin{cases} T_A = T_B = T \\ -T \alpha(x, t) + T \alpha(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \end{cases}$$

Or comme les angles sont faibles, alors on a alors à l'ordre 1 :  $\alpha = \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ . D'où :

$$-T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + T \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t).$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (y(x + dx, t) - y(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) dx \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) dx$$

d'où

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \iff \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0$$

On reconnaît une équation de d'Alembert (1746) de la forme  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0$ , où  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  est homogène à une vitesse et correspond à la célérité de l'onde mécanique sur la corde. Cette équation émerge du couplage entre deux grandeurs, ici la tension et la position.

Cette équation est linéaire, elle respecte donc le principe de superposition. Elle est de plus réversible, c'est à dire qu'une inversion de  $t$  en  $-t$  garde l'équation inchangée.

**OdG** : Pour une corde de guitare, on a  $\mu \sim 25$  g/m,  $T \sim 100$  N,  $c \sim 200$  m/s.

### Remarque sur les approximations

On a écrit que  $T$  ne dépend pas de  $x$  en simplifiant  $\cos(\alpha) = 1$ . Cependant, on devrait si on ne fait pas cette approximation avoir :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T\alpha) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (T\alpha) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Mais cette équation, on la retrouve ailleurs !*

### 1.3 Équation des télégraphistes

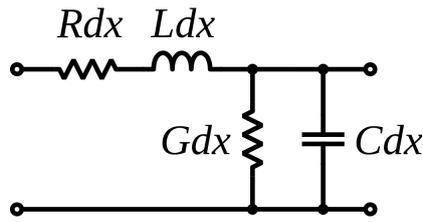


FIGURE 2 – Le câble coaxial modélisé avec pertes.

Une portion infinitésimale de ligne électrique peut être représentée par un quadripôle où :

- la résistance linéique  $R$  du conducteur est représentée par une résistance série (exprimée en ohms par unité de longueur)
- l'inductance linéique  $L$  est représentée par une bobine (H par unité de longueur)
- la capacité linéique  $C$  entre les deux conducteurs est représentée par un condensateur (F par unité de longueur)
- la conductance linéique  $G$  du milieu diélectrique séparant les deux conducteurs (siemens par unité de longueur). Le schéma électrique du modèle représente cette conductance par une résistance de valeur de  $1/G$  ohms.

La résistance et la conductance croissent avec la fréquence et l'inductance varie dans de moindres proportions, à cause de l'effet de peau et, dans les lignes bifilaires, de l'effet de proximité.

Soient  $U(x, t)$  la tension et  $I(x, t)$  le courant en un point éloigné d'une distance  $x$  du début de la ligne à un instant  $t$ , on peut écrire deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, t) = -L \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) - RI(x, t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x, t) = -C \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) - GU(x, t)$$

De cette formulation, on peut tirer deux équations ne faisant chacune intervenir qu'une variable :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) = LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) + (RC + GL) \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) + GRU(x, t) \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, t) = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x, t) + (RC + GL) \frac{\partial I}{\partial t}(x, t) + GRI(x, t) \end{cases} \quad (2)$$

Ces équations sont de la forme dite de l'équation des télégraphistes. Elles prédisent la propagation des grandeurs avec pertes, mais nous allons voir qu'on peut en tirer une équation plus simple.

### 1.4 Câble coaxial modèle

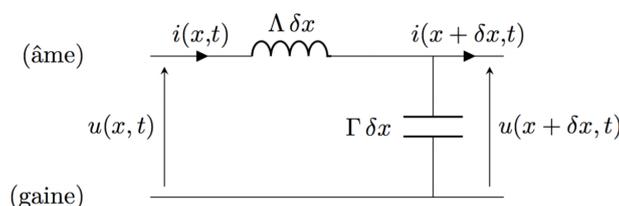


FIGURE 3 – Le câble coaxial.

Il s'agit du câble standard que l'on utilise pour transmettre de l'information en salle de tp, mais aussi entre une parabole et une télé! Ici on négligera les pertes et résistances. On obtient alors en reprenant les mêmes calculs et en changeant de notations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} \quad (4)$$



**Mesure de la vitesse de propagation**

↙ ⊕ ↘

Mettre un T sur le GBF. Relier une extrémité au câble, l'autre à un oscilloscope. Envoyer au GBF un burst sinusoïdale de fréquence 5 MHz, d'amplitude 5 V, avec 1 cycle et 1ms entre chaque burst. Régler l'impédance de l'oscilloscope sur 50 Ω au lieu de 1 MΩ pour éviter les réflexions. On observe à l'oscilloscope les réflexions des bursts sur l'autre extrémité du câble. Mesurer l'intervalle de temps Δt entre un burst et sa réflexion. On en déduit la vitesse de propagation  $v = \frac{2l}{\Delta t}$  avec  $l = 100$  m. On doit trouver  $2 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . On utilise un burst sinusoïdal pour limiter la dispersion en fréquence dans le câble (visible avec un créneau). Le burst réfléchi est déformé à cause de cette dispersion (cf équation des télégraphistes)

### 1.5 Points communs et analogies

	Corde vibrante	Câble coaxial	Onde acoustique	Onde électromag.
Grandeurs couplées	$T_y$ et $v_y$	$i$ et $u$	$\vec{v}_1$ et $p_1$	$\vec{H}$ et $\vec{E}$
Equations couplées	$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial T_y}{\partial t}$ $\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t}$	$\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ $\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t}$	$\text{div}(\vec{v}_1) = \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$ $\text{grad}(p_1) = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$	$\text{rot}(\vec{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\text{rot}(\vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$
Vitesse	$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_s}}$	$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$
Impédance	$Z = \mu c = \sqrt{\mu T_0}$	$Z = \lambda c = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$	$Z = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$	$Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$
Densité d'énergie	$\frac{1}{2} \mu v_y^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2$	$\frac{1}{2} \lambda i^2 + \frac{1}{2} \gamma u^2$	$\frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$	$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2$
Puissance	$P = -v_y T_y$	$P = ui$	$\vec{P} = -p_1 \vec{v}_1$	$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

Une onde, c'est la propagation de deux grandeurs **couplées**. D'Alembert est vérifié pour les deux quantités couplées, à la même vitesse.

### Valeurs de $\Gamma$ et $\Lambda$

$\Lambda = \mu_0 \ln \frac{b}{a}$  avec  $a$  et  $b$  les rayons du câble.  $\Gamma = \frac{\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$ . Le principal défaut reste la résistance de l'inductance.

*La question que l'on peut se poser cependant c'est celle-ci : un onde ça se propage, mais sur une corde de guitare, ça bouge pas. Pourquoi ?*

## 2 Onde progressive

### 2.1 Définitions

On définit une **onde** comme étant un champ (scalaire ou vectoriel)  $F(M, t)$  défini dans un domaine de l'espace et dépendant du temps, représentant une grandeur physique et obéissant à une équation aux dérivées partielles couplant l'espace et le temps : la fameuse **équation de d'Alembert** (ou équation d'onde)

$$\Delta F(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(M, t) = 0 \quad (5)$$

On peut alors définir une onde **progressive** comme étant une onde décrite par un champ du type

$$F(M, t) = A(M)f(t - \tau(M)) \quad (6)$$

où  $A(M)$  est l'amplitude,  $\tau(M)$  est un terme de retard dépendant de l'espace et  $f$  est une fonction à la fois du temps et de l'espace (via  $\tau(M)$ ) et est donc responsable de la propagation.

Un cas particulier d'onde progressive est décrit par une fonction  $F(M, t)$  qui prend la même valeur en tout point d'un plan orthogonal à la **direction de propagation** définie par un vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Ce plan est appelé **plan d'onde** ou **surface d'onde**, et les ondes vérifiant cette condition sont appelées **ondes planes**. Pour ces ondes, on peut donc choisir un système d'axes cartésien judicieux pour que  $F$  ne dépendent que d'une coordonnée spatiale.

De manière générale, on définit une surface d'onde comme étant la surface de l'ensemble de points dans le même état vibratoire.

### 2.2 Résolution de l'équation d'onde

Reprenons l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. On a donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

On cherche donc une solution  $\psi(x, t)$  qui décrit forcément une onde plane pour laquelle les plans d'ondes sont les plans à  $x$  constant. On effectue les changements de variable  $u = x - ct$  et  $v = x + ct$  pour obtenir après une dérivation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad (8)$$

On dérive une seconde fois pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \quad (9)$$

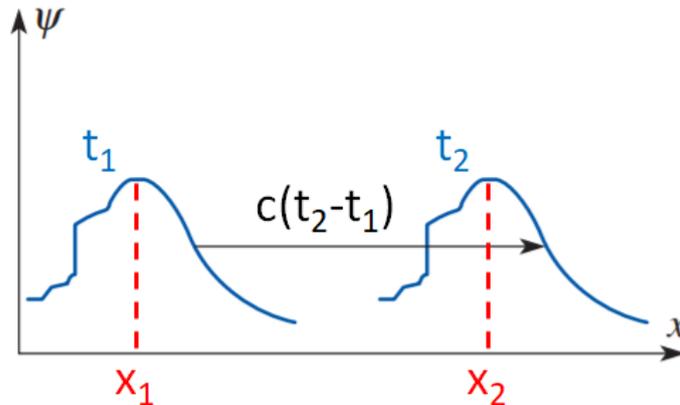
On injecte ces expressions dans l'Alembert pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \quad (10)$$

On intègre selon  $u$  puis  $v$  en prenant des constantes d'intégration nulles (car elles ne représentent pas une onde) puis on réexprime  $\psi$  selon  $x$  et  $t$  pour finalement obtenir

$$\psi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (11)$$

Tâchons de comprendre pourquoi on caractérise ces solutions d'ondes "progressives". Pour cela, regardons le terme  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ .



Si on suppose que l'onde ne se déforme pas au cours du temps, on a

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right) = f\left(t_2 - \frac{x_2}{c}\right) \Rightarrow t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c} \Rightarrow x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

Tout se passe comme si l'onde avait parcouru la distance  $x_2 - x_1$  pendant une durée  $t_2 - t_1$  à la vitesse  $c$ . Le terme  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$  correspond donc à une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $c$ .

Pour le terme  $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ , on trouve  $x_2 - x_1 = -c(t_2 - t_1)$ . Le terme  $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$  correspond donc à une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants à la vitesse  $c$ .

En conclusion, la solution générale en terme d'ondes planes de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle peut s'écrire comme la superposition de deux OPP se propageant à la même vitesse  $c$ , l'une dans le même sens que l'axe  $Ox$  et l'autre en sens opposé.

Dans le cas général à 3 dimensions, une **onde plan progressive** qui est décrite par une fonction de la forme

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{x} - ct) + g(\vec{u} \cdot \vec{x} + ct)} \quad (12)$$

Une telle onde se propage dans la direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  à la vitesse  $c$  et ses surfaces d'onde sont les plans orthogonaux à  $\vec{u}$ . La fonction  $f$  décrit une OPP se propageant dans le même sens que  $\vec{u}$  tandis que  $g$  décrit les ondes se propageant dans le sens opposé à  $\vec{u}$ .

### Remarque

Toute solution de l'équation de d'Alembert est une superposition d'OPP dont les directions  $\vec{u}$  couvrent tout l'espace. Cette superposition est justifiée par la linéarité de l'équation de propagation. Il faut cependant faire attention au fait qu' **une superposition d'OPP ne garantit pas forcément une onde résultante ni plane, ni progressive**, comme le montrent les ondes stationnaires, ondes guidées).

## 2.3 Les ondes planes progressives harmoniques

On définit une **onde plane progressive harmonique** une OPP se propageant dans le même sens qu'un vecteur  $\vec{u}$  est décrite sous la forme

$$\psi(\vec{x}, t) = a_0 \cos\left(\omega t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{c}\right) = a_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad (13)$$

avec  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$  le **vecteur d'onde**. Notons que les OPPH **ne sont pas physiques** car elles sont d'extension spatiale et temporelle infinies. Cependant, elles ont une forte utilité pour étudier les OPP.

En effet, les OPP sont périodiques sont de par leur nature périodiques, de période notée  $T$ . La linéarité de l'équation d'onde et le théorème de la décomposition de Fourier concernant les fonctions  $T$ -périodiques nous permettent alors d'affirmer que toute OPP peut être décomposée en une série de fonctions sinusoïdales, *i.e.* **toute OPP peut être décomposée en une série d'OPPH**. Les OPPH constituent donc une base d'étude pour les ondes planes, déjà elles-mêmes une base d'étude pour les solutions générales de d'Alembert.

## 2.4 Retour au câble coaxial : notion d'impédance propagative

L'utilisation d'OPP dans le cas du câble coaxial va nous permettre de définir l'**impédance** de ce câble. On avait établi pour cet exemple que les grandeurs  $u$  et  $i$  étaient couplées par les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (14)$$

Supposons maintenant qu' $i$  soit un OPP se propageant selon les  $x$  croissants. Alors  $i(x, t) = f(x - vt)$  et la première équation devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda v f'(x - ct) \quad (15)$$

On intègre pour obtenir  $u(x, t) = \Lambda v f(x - ct) + F(t)$ . Cependant,  $F(t)$  doit satisfaire à l'équation de d'Alembert donc  $F(t)$  s'écrit sous la forme  $F(t) = at + b$ . Pour obtenir une solution non divergente, on prend  $a = 0$  et puisque la solution est une onde, on prend également  $b = 0$ . On se retrouve finalement avec

$$u(x, t) = \Lambda v f(x - ct) = \Lambda v i(x, t) \quad (16)$$

On définit alors l'impédance caractéristique par  $Z = \frac{u}{i} = \Lambda v = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ . **C'est une impédance de nature propagative et non pas résistive**. Avec les valeurs de  $\Lambda$  et  $\Gamma$  trouvées précédemment, on trouve  $Z = 50 \Omega$ . Cette valeur est tout sauf un hasard puisqu'elle correspond à l'impédance d'entrée des GBF. Les dimensions du câble ont en effet été choisies pour réaliser cette adaptation d'impédance.

## 2.5 Aspect énergétique

Restons sur l'exemple du câble coaxial. Son énergie linéique est la somme de la contribution de la bobine et celle du condensateur, on a donc

$$e = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x, t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x, t) \quad (17)$$

La puissance circulant dans le câble est quant à elle donnée par

$$\mathcal{P} = u(x, t)i(x, t) \quad (18)$$

La grandeur  $\mathcal{P} \vec{e}_x$  représente donc le flux d'énergie à travers le câble en un point  $x$  par unité de temps puisque nous sommes dans une description linéique.

Prenons à nouveau une OPP :  $i(x, t) = f(x - vt)$  et  $u(x, t) = Zi(x, t)$ . On obtient alors

$$e(x, t) = \Lambda i^2(x, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(x, t) = \Lambda i^2(x, t)$$

On peut alors écrire

$$\langle \mathcal{P} \rangle = v \langle e \rangle \quad (19)$$

L'énergie se propage donc à la vitesse  $v$  (selon la direction de propagation, évidemment).

Finalement, dressons un bilan d'énergie linéique pendant un intervalle  $dt$  sur une longueur  $dx$ . La variation d'énergie linéique est égale au flux linéique entrant en  $x$  moins le flux sortant en  $x + dx$ . On peut alors retrouver une équation bien connue, l'équation locale de conservation de l'énergie

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0} \quad (20)$$

Cette équation peut être trouvée pour n'importe quel OPP avec un bilan énergétique unidimensionnel sur un tronçon du milieu de propagation. On remarque qu'elle ne contient aucune source de dissipation (pour ça il faudrait rajouter par exemple une résistance dans le circuit équivalent au câble). Le terme  $\frac{\partial e}{\partial t}$  représente la variation locale d'énergie tandis que  $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$  représente la variation d'énergie due à son transport.

### Cas de la corde de Melde

$$e = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T}(Ty)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{\partial y}{\partial t}Ty$$

Dans le cas de l'OPPH,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \langle e \rangle dx \quad \text{avec} \quad \langle e \rangle = \frac{1}{2}\mu \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{\mu}{4} \quad (21)$$

On voit donc que  $\langle \mathcal{E} \rangle$  diverge !! Les OPPH contiendraient donc une infinité d'énergie, ce qui bien sûr n'est pas physique.

↓ Toutes les ondes progressives ne sont pas planes...



## 2.6 Ondes sphérique

On cherche maintenant l'expression d'une onde progressive non-plane dont l'énergie est conservée plan par plan. Pour cela, cherchons une solution à d'Alembert :

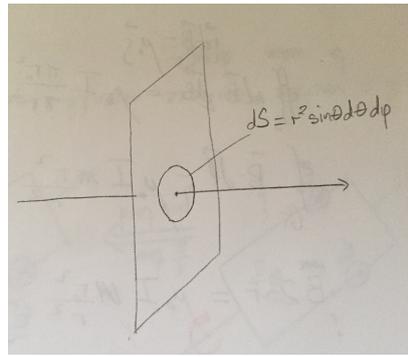
$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (22)$$

telle que

$$\psi(r, t) = A(r) [f(r - ct) + g(r + ct)]$$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'au terme en  $f(r - ct)$ . L'énergie de l'onde vaut alors  $|\psi^2| = |A^2(r)||f^2(r - ct)|$  et sa valeur moyenne vaut  $\langle |\psi^2| \rangle = \frac{1}{2} \langle |A^2(r)| \rangle$ . On intègre cette valeur moyenne sur un plan et on veut obtenir une constante :

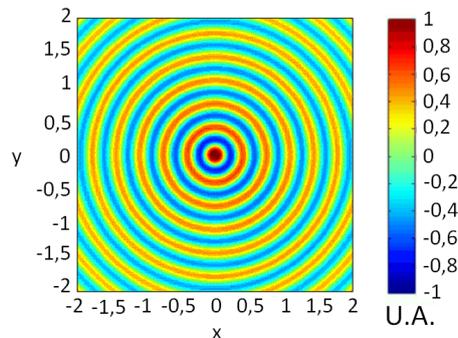
$$\begin{aligned} \iint \langle |\psi^2| \rangle dS = \text{constante} &\iff \iint \frac{1}{2} \langle |A^2(r)| \rangle r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \text{constante} \\ &\iff \langle |A^2(r)| \rangle r^2 = \text{constante} \end{aligned} \quad (23)$$



On choisit  $A = \frac{1}{r}$  pour écrire

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - ct) + g(r + ct)]$$

Une onde décrite par une telle fonction est appelée une **onde sphérique**. Ses surfaces d'ondes sont des sphères et son énergie est conservée plan par plan<sup>1</sup>. Cependant, le facteur  $\frac{1}{r}$  lui fait perdre sa périodicité spatiale.



### Symétrie sphérique

En symétrie sphérique, cette onde est la solution naturelle de l'équation d'Alembert où

$$\Delta\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

Les ondes progressives ne peuvent pas tout expliquer, comme par exemple l'expérience de la corde de Melde. Il faut donc introduire un nouveau type d'ondes : les ondes stationnaires.



## 3 Onde stationnaire

On l'a vu, sur une guitare, l'onde est là, on l'entend, elle transmet de l'énergie à l'air, mais elle bouge pas vraiment. Pareil sur une corde de Melde d'ailleurs, ça ne se propage pas ce truc !



1. On peut montrer le gif correspondant à une onde sphérique.

**Corde de Melde**

Amazing, une corde de Melde. Montrer les harmoniques, et si possible le montrer aussi avec une corde de guitare.

### 3.1 Des ondes progressives aux ondes stationnaires

**Définition :** Une onde est dite **stationnaire** si son expression fait intervenir de manière découplée une fonction du temps  $t \mapsto f(t)$  et une de l'espace  $\vec{r} \mapsto g(\vec{r})$ . On note alors la grandeur transportée par l'onde

$$s(\vec{r}, t) = f(t) \times g(\vec{r}) \quad (24)$$

On voit clairement que pour la corde de Melde c'est ce que l'on a : un profil  $g(x)$  qui ressemble ici à une sinusoïde, qui est modulé par une variation temporelle oscillante elle aussi.

Cherchons alors une solution de la forme  $g(x)f(t)$  à l'équation générale de d'Alembert 7 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(t)g(x)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(t)g(x)) &= 0 \\ \text{d'où} \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

On a donc deux fonctions de deux variables différentes qui sont égales, les deux sont donc égales à une constante. Si cette constante est nulle alors l'onde n'existe pas... Et si cette constante est positive les solutions en exponentielles croissantes ne peuvent pas vérifier les CL. La constante est donc négative et homogène à des  $s^{-2}$ , on la notera donc  $-\omega^2$ . Il vient donc un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\omega^2 & \Rightarrow g(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi) \\ \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} & \Rightarrow f(x) = \beta \cos(kx + \varphi) \end{cases} \quad \text{avec } k = \pm \frac{\omega}{c} = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \quad (26)$$

Et comme on s'y attendais, pour le bilan, on obtient avec les conditions aux limites la magnifique forme de l'onde de la corde de Melde :

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) \quad (27)$$

### 3.2 Lien mathématique entre les deux types d'ondes

On peut utiliser un peu de trigonométrie astucieuse pour se rendre compte que

$$y(x, t) = \frac{y_0}{2} [\cos(kx + \omega t + \phi + \varphi) + \cos(kx - \omega t + \varphi - \phi)] \quad (28)$$

Ainsi, une onde stationnaire peut toujours s'écrire comme la somme de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude, de même pulsation mais de sens opposés. Par un raisonnement analogue, toute onde progressive harmonique peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires.

À la vue de l'équivalence entre les deux descriptions, il est donc naturel de se demander quel type de description choisir. Pour cela, il faut se baser sur les CL. Si les CL imposent un noeud de vibration quelque part, on choisira la description en ondes stationnaires dont la forme en produit facilite la prise en compte du noeud de vibration.

### 3.3 Propriétés de l'onde stationnaire

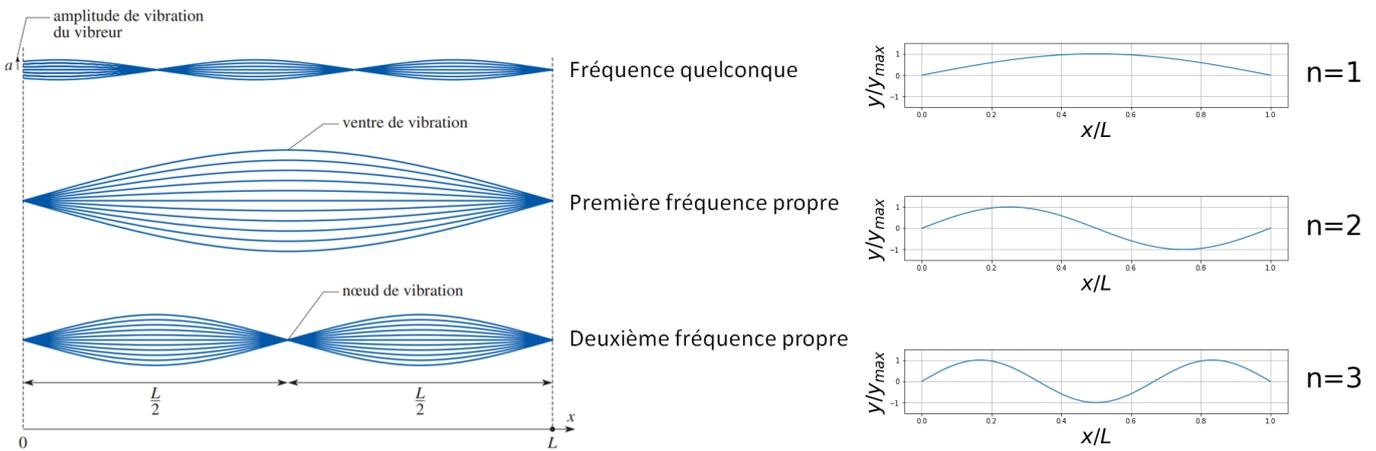


FIGURE 4 – Les noeuds et ventres de différents modes.

Je viens de parler de noeud de vibration...

**Définition :** On nomme noeud de vibration un 0 de la partie spatiale d'une onde stationnaire. En ce lieu l'onde est toujours nulle. On nomme de la même façon un ventre de vibration un maximum ou minimum de la partie spatiale.

On remarque que l'existence de noeuds de vibration impose un comportement particulier et un lien avec les conditions aux limites. En effet dans le cas de la corde de Melde, le 0 et le  $L$  sont des noeuds de vibration forcés. On a donc forcément

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad (29)$$

Cela impose directement  $\lambda_n = \frac{2}{n}L$  et  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ .

**Définition :** On nomme **mode de vibration** indicé par  $n$  chacune de ces possibilités.

Un mode de vibration n'est alors possible que si la longueur d'onde associée est un sous multiple de la longueur de la corde. Il est important de noter que l'origine de cette structure en modes provient directement des conditions aux limites, ces mêmes conditions qui ont nécessité l'utilisation des ondes stationnaires. On peut généraliser ce résultat : **toute onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert possède une structure en modes.**



#### Scruter les modes de la corde de Melde



Tu sais quoi faire non ?

Sans exciter sinusoïdalement la corde en une extrémité, si on est assez précis, on peut l'attacher des deux côtés et constater que si on pince la corde en  $L/2$ , qu'on excite la corde, le mode 2 reste même après avoir relâché entièrement la corde. Pareil si on pince en  $L/3$  et  $2L/3$ , mais là il faut trois bras, donc ça devient compliquer.

Si il y a une guitare disposition, montrer les harmoniques et expliquer le lien avec le Fabry-Perrot.

### 3.4 Instruments de musique

MP29

### 3.5 Aspect énergétique

On peut exprimer l'énergie contenue dans une onde stationnaire.

$$e(x, t) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (30)$$

Pour un mode donné  $y_n$  on a directement

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \omega_n^2 y_{0,n}^2 \sin^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \\ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = k_n^2 y_{0,n}^2 \cos^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \end{cases} \quad (31)$$

On peut donc écrire l'énergie linéique puis l'énergie totale du mode :

$$E_n = \frac{T_0}{4L} (n\pi)^2 y_{0,n}^2 = \text{cst}_n \quad (32)$$

Le fait que l'on ait ici une énergie constante nous montre bien qu'il y a des phénomènes que l'on a pas pris en compte. En effet notre onde finit par s'arrêter ! D'ailleurs on n'entendrait pas les guitares si son énergie était constante, puisqu'il n'y aurait pas de transmission à l'air !

D'ailleurs l'hypothèse des petits angles à résonance, c'est pas super juste non plus. Et le module d'Young entre en jeu en plus !

### 3.6 Application à la musique

On peut s'amuser à calculer l'évolution de la forme de la corde et la décroissance des harmoniques en fonction de la condition initiale dans différents instrument à corde. ➤ <https://perso.crans.org/chapon/tipe0.9.pdf>