

TIPE 2006

Musique et science : de Stradivarius à Helmholtz

Emilien Chapon

19 juin 2006

Introduction

Musique et science sont deux disciplines à la fois antagonistes et intimement liées. En effet, depuis Pythagore, la musique est considérée comme très liée aux mathématiques, et le fonctionnement des instruments a fait l'objet de nombreuses études scientifiques depuis plusieurs siècles. Cependant, le caractère rigoureux et objectif de la science s'oppose au caractère artistique de la musique, basée sur des règles empiriques et parfois subjectives.

Il m'a semblé intéressant d'étudier l'intervention de la dualité entre musique et science dans le fonctionnement des instruments de musique, en me limitant à quelques exemples d'instruments à cordes. Plus précisément, j'ai étudié certains des phénomènes physiques intervenant dans leur fonctionnement, et j'ai cherché ce qu'ils impliquaient pour le musicien.

1 Son produit par la corde seule

Dans cette partie, je m'attarderai uniquement sur les vibrations transversales d'une corde, qui sont la cause à la fois la plus visible et la plus importante de la production d'un son par les instruments à corde. Après avoir donné une forme assez générale de solutions, j'appliquerai ce résultat aux cas du clavecin, du piano et du violon.

1.1 Forme générale des solutions

Les vibrations transversales de la corde sont données par l'équation de d'Alembert¹ :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

avec y l'élongation de la corde, fonction de l'abscisse x et du temps t , μ la masse linéique de la corde et T_0 la tension de la corde. La résolution de cette équation est détaillée en annexe, page 12.

Pour résumer très succinctement, disons qu'on cherche les solutions $y(x, t)$ sous la forme d'une somme de série de fonctions de la forme :

$$\forall x, t : y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) \text{ avec } y_n(x, t) = f_n(x)g_n(t)$$

Ces solutions doivent vérifier les conditions aux limites (la corde étant de longueur L) :

$$\forall t, y(0, t) = y(L, t) = 0 \text{ et } \forall x, \begin{cases} y(x, 0) &= u(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= v(x) \end{cases}$$

Ces conditions sont bien sûr dictées par des conditions physiques : la recherche d'une fonction sous la forme d'une somme d'« ondes stationnaires » (fonctions à variables séparées) vient de ce que

¹établie en annexe, page 12. Ignorer les annexes ne compromet cependant pas l'intelligibilité de ce dossier.

c'est ce qu'on observe expérimentalement (à cause du caractère limité de la corde) ; les conditions aux limites viennent, d'une part, du fait que la corde est maintenue immobile à ses extrémités et, d'autre part, du fait que l'on se donne la position ($u(x)$) et la vitesse ($v(x)$) de la corde à l'instant 0.

Décomposons u et v (prolongées en fonctions $2L$ périodiques) en somme de leurs séries de Fourier (en supposant qu'elles vérifient les conditions nécessaires) :

$$\forall x \in [0, L], u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ et } v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

D'après cette décomposition et toutes les hypothèses initiales, on obtient finalement que :

$$\forall x, t : y_n(x, t) = \sin(k_n x) \left(\gamma_n \cos(\omega_n t) + \frac{L}{n\pi c} \delta_n \sin(\omega_n t) \right) \quad (2)$$

avec :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

1.2 Cas particuliers : le clavecin, le piano et le violon

Nous allons ici nous intéresser aux cas particuliers de ces trois instruments. Les cas du clavecin et du piano rentrent dans le cadre de l'étude ci-dessus, cependant, le cas du violon sera traité légèrement différemment. En effet, il s'agit pour cet instrument non d'oscillations libres mais d'oscillations entretenues.

1.2.1 Un instrument à cordes pincées : le clavecin

Dans ce cas, $v = 0$ et u a une forme de triangle (voir figure 1, page 8). En effet, la corde est pincée à la distance b du chevalet, à une hauteur h , ce qui idéalement forme un triangle si la corde est très tendue, et elle est supposée lâchée avec une vitesse nulle.

La nullité de v entraîne que $\forall n, \beta_n = 0$

Recherche des α_n : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors α_n est donné par la formule des coefficients de Fourier de u :

$$\begin{aligned} \alpha_n = \gamma_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{2L^2 h}{bn^2 \pi^2 (b-L)} \sin\left(\frac{bn\pi}{L}\right) \end{aligned}$$

1.2.2 Un instrument à cordes frappées : le piano

Dans ce cas, $u = 0$ et v a une forme d'impulsion rectangulaire (voir figure 2). En effet, la corde est frappée à la distance a du chevalet, par un marteau de largeur e , ce qui donne à cet endroit une vitesse u à la corde. On suppose que la corde est rectiligne lors de la frappe.

La nullité de u entraîne que $\forall n, \alpha_n = 0$

Recherche des β_n : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors β_n est donné par la formule des coefficients de Fourier de v :

$$\begin{aligned} \beta_n = \frac{L}{n\pi c} \delta_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{4uL}{n^2 \pi^2 c} \sin\left(\frac{n\pi}{2L}(2a+e)\right) \sin\left(\frac{n\pi e}{2L}\right) \end{aligned}$$

1.2.3 Remarques sur les résultats précédents

Avant tout, on peut remarquer que selon la valeur de a ou de b , certains harmoniques seront absents : ce phénomène est appelé *réjection des modes*. Par exemple, dans le cas du clavecin, qui s'apparente au cas de la guitare (instrument à cordes pincées), le spectre d'une corde pincée en son milieu ne contiendra que les harmoniques impairs. Par contre avec un b très petit, la plupart des harmoniques seront présents, donnant un son plus « riche ».

Seconde remarque : dans le cas du piano, si e est très petit devant L (ce qui est le cas dans la réalité), la décroissance des harmoniques est pratiquement en $1/n$ pour les premiers, alors que les harmoniques du clavecin décroissent en $1/n^2$: ceci participe au fait que le son du piano est plus « riche » que celui du clavecin, qui lui est plus « sec ».

1.2.4 Un instrument à cordes frottées : le violon

Étude physique. Le fonctionnement du violon diffère de celui du clavecin ou du piano par le fait que les vibrations sont entretenues, et non libres. La « force excitatrice » provient de l'archet. Son fonctionnement est expliqué par les lois de Coulomb. En effet, le point important est la différence entre le coefficient de frottement statique f_s et le coefficient de frottement dynamique f , pratiquement nul grâce à l'emploi de colophane sur l'archet. Ceci provoque une alternance de phases de glissement et de non-glissement, du fait de la compétition entre la force de rappel F et la force de frottement T (avec les notations de la figure 3). La courbe de l'évolution de l'élongation de la corde en fonction du temps, à une abscisse donnée, est alors celle de la figure 4.

Étude des coefficients de Fourier. Les α_n et β_n sont, dans le cas du violon, très lourds à calculer et relativement peu intéressants. Cependant, on peut avoir une idée de leur forme en approximant la courbe de l'évolution du déplacement de la corde en fonction du temps en segments de droites. En se plaçant au milieu, la courbe a l'allure suivante décrite sur la figure 5.

On obtient alors que, pour $n \in \mathbb{N}$ et en se plaçant en un point x de la corde :

$$\begin{aligned} \alpha_n = 0 \quad \text{et} \quad \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{2}{T} \int_{-T}^T g_0(x, t) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) dt \\ &= \frac{2x_0}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

(calcul similaire à celui des coefficients du clavecin).

En prenant x tel que $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ soit non nul, on obtient donc que :

$$\beta_n = \frac{2x_0}{n^2\pi^2}$$

Complément : forme de la corde à un instant t donné. En traçant la forme de la corde à un instant t donné à partir des coefficients calculés précédemment, on s'aperçoit que la courbe est formée de deux segments de droites (en réalité, à l'endroit où ces segments se coupent, la corde décrit une courbe de très faible rayon de courbure). Helmholtz a par ailleurs montré que le mouvement de la corde au cours du temps s'inscrivait entre deux arcs de paraboles.

J'ai essayé d'observer, sur un violoncelle, la forme de la corde à un instant t donné, à l'aide d'un stroboscope. Cependant, bien que la corde vibre avec une amplitude de plusieurs centimètres sur cet instrument, la longueur de la corde est beaucoup plus grande (plus d'un mètre), ce qui fait que je n'ai pas pu observer la forme voulue. Si on essaie d'observer la forme de la corde quand on la pince, une autre difficulté s'ajoute à la précédente : l'amortissement assez rapide des vibrations.

2 Du son produit par la corde seule à celui produit par l'instrument

L'étude précédente, si elle donne un aperçu du son produit par un instrument à corde, est très insuffisante, car elle omet de nombreux phénomènes. Elle ne prend pas en compte la rigidité de la corde, par exemple.

2.1 L'inharmonicité du piano

En traçant le spectre d'un son de piano, on constate que les différentes raies ne sont pas équidistantes les unes des autres, comme elles devraient l'être pour un son périodique. Les partiels (puisque l'on ne peut plus parler d'harmoniques) sont légèrement « trop hauts » (leurs fréquences sont légèrement plus grandes que prévu).

Cela est dû en particulier à la raideur des cordes de piano, qui sont en acier. Cela conduit à rajouter un terme dans l'équation de d'Alembert :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (3)$$

où E est le module de Young (qui mesure l'allongement relatif lors d'un essai de traction) et S et K des paramètres géométriques (surface et rayon de giration). Je n'établirai pas cette formule, car je ne maîtrise pas sa démonstration.

J'ai résolu cette équation d'une manière similaire à celle utilisée pour l'équation de d'Alembert non modifiée². Les pulsations propres sont alors données par :

$$\omega_n = n\omega_0 \sqrt{1 + \beta n^2}$$

On constate que l'erreur par rapport à l'étude simple sans tenir compte de la raideur de la corde augmente avec l'ordre de l'harmonique.

J'ai comparé les prévisions de cette équation avec des mesures effectuées sur un piano de synthétiseur MIDI et sur un piano réel : les résultats concordent assez bien (surout, bien sûr, pour le piano MIDI, dont l'enregistrement, numérique, est vierge de tout bruit), comme on le voit sur la figure 6 pour le piano réel. J'ai ajusté le paramètre β au mieux pour optimiser la ressemblance des courbes. Les causes des écarts sont principalement le bruit dû à la prise de son pour le piano réel, et des incertitudes dans la mesure de la fréquence des pics (donnée à 3 Hz près environ par le logiciel Audacity utilisé pour les mesures).

Des remarques sur l'inharmonicité du piano ont été ajoutées en annexe, page 14.

2.2 Un autre exemple : les battements

Les battements sont un phénomène bien connu des musiciens, qui peut améliorer ou détériorer la qualité du son, selon son amplitude et les circonstances. Leur origine est simple : lorsque que deux systèmes produisent des sons de fréquences proches, on n'entend qu'une note, mais dont l'amplitude varie en fonction du temps, à une fréquence très petite devant celle de la note. L'explication est résumée par la formule trigonométrique ci-après : au deuxième membre, le terme en sin est le terme principal, à variation rapide, modulé par le terme en cos, à variation lente.

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

J'ai observé le phénomène en jouant, sur un violon, deux notes très proches sur deux cordes consécutives : on entend clairement les battements à l'oreille, et après enregistrement on observe la forme modulée du signal (voir figure 7).

3 L'importance des transitoires

3.1 Expériences

Les transitoires, variations de l'amplitude et du spectre du son au cours du temps (attaque, atténuation), ont une importance primordiale dans la reconnaissance d'un instrument par l'oreille humaine. J'ai réalisé deux expériences qui le montrent bien ³.

²voir résolution en annexe page 13

³En annexe : plus d'informations sur les logiciels utilisés

3.1.1 Le son du piano sans transitoires

J'ai modifié, avec le logiciel Audacity, plusieurs sons de piano (correspondant à différentes notes), pour ne retenir que le spectre du son et le priver de son évolution dans le temps. J'ai pour cela dupliqué un grand nombre fois un petit groupe de périodes du son original. Le résultat est étonnant : le son produit ressemble grossièrement à celui d'une flûte. En rajoutant des transitoires d'instrument à vent (attaque et atténuation, léger trémolo), la ressemblance est encore plus forte !

3.1.2 Le son correspondant à l'étude de la première partie

A l'inverse, à l'aide du logiciel CSound, j'ai fait produire par l'ordinateur un son possédant les transitoires d'une corde pincée (décroissance exponentielle du son, surtout pour les harmoniques élevés) avec les harmoniques trouvés pour les études du piano et du clavecin. Le son obtenu est assez ressemblant, surtout pour le clavecin. Néanmoins, le son semble provenir d'un très mauvais instrument, ou d'un synthétiseur de mauvaise qualité. C'est normal : comme expliqué plus haut, le spectre réel d'un piano ou d'un clavecin est très différent de celui obtenu en n'étudiant que les vibrations transversales de la corde.

J'ai aussi fait reproduire par Csound un son possédant les amplitudes des harmoniques mesurées sur un son de violon et un son avec les amplitudes calculées de la première partie : le résultat est très satisfaisant, mais une fois encore, le son prédit par la théorie semble émis par un instrument de mauvaise qualité.

3.2 Le piano : son immédiat, son rémanent

Dans le cas du piano, on observe un phénomène intéressant (voir figure 8) : la décroissance du son est d'abord rapide, puis beaucoup plus lente.

Ceci est expliqué principalement par deux phénomènes :

3.2.1 Le nombre de cordes par note

Dans un piano, chaque marteau frappe deux ou trois cordes à la fois. Cependant, à cause par exemple de petites irrégularités à la surface du marteau, les deux cordes ne sont pas frappées exactement avec le même vitesse, ce qui implique que l'une s'arrêtera de vibrer avant l'autre (ou les autres, dans le cas de trois cordes). De plus, il se produit un phénomène de couplage au niveau du chevalet : les deux (ou trois) cordes s'échangent de l'énergie via le chevalet. J'ai imaginé un système de trois oscillateurs amortis (dans le cas de deux cordes) pour modéliser ce couplage, représenté sur la figure 9. Deux de ces oscillateurs possèdent les mêmes caractéristiques : ce sont les cordes. Le troisième, le chevalet, possède bien sûr des caractéristiques très différentes. On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} &= -k_1 x + \alpha_1 \dot{x} + k_2 y + k_2 z \\ m_2 \ddot{y} &= -k_2 y + \alpha_2 \dot{y} - m_1 \ddot{x} \\ m_2 \ddot{z} &= -k_2 z + \alpha_2 \dot{z} - m_1 \ddot{x} \end{cases}$$

On résout ce système dans Maple (de manière formelle, en utilisant la méthode de Laplace), en fixant toutes les conditions initiales à 0, sauf les vitesses initiales des cordes qui sont très légèrement différentes. Ce qu'on obtient correspond très bien à la réalité : comparer les figures 8 et 10 en annexe.

Des détails sur la résolution de ce système sont disponibles en annexe.

Dans le cas d'un système à trois cordes, on obtient des résultats similaires.

On peut aussi remarquer qu'en utilisant la pédale douce, le marteau ne vient frapper que deux cordes au lieu de trois. Dans ce cas, le son rémanent apparaît immédiatement (voir figure 11).

3.2.2 Le défaut d'accordage

Il arrive également que les différentes cordes frappées par le marteau ne soient pas exactement accordées. Dans la modélisation que j'ai adoptée, cela revient à attribuer aux ressorts des oscillateurs modélisant les cordes des raideurs légèrement différentes. On obtient alors des résultats très similaires.

Conclusion

La science permet donc d'expliquer, du moins en partie, certains phénomènes ressentis par les musiciens. Cependant, tout ne peut pas être expliqué rigoureusement. Outre la complexité des phénomènes en jeu dans les instruments de musique (j'ai notamment omis la contribution du corps de l'instrument, à la contribution à la fois très importante et très complexe au son final), il faut ajouter la spécificité de l'oreille humaine, dont la précision est loin d'être infinie et linéaire tant quant à la hauteur des sons qu'à leur timbre, leur amplitude, comme j'ai pu le constater dans quelques expériences supplémentaires. En outre, beaucoup de critères esthétiques, pour la plupart culturels, resteront toujours hors du domaine scientifique . . .

Bibliographie

Livres :

- *Les instruments de l'orchestre* (bibliothèque Pour La Science)
- E. Leipp : *Acoustique et musique* (Masson, 4ème édition)
- L. Landau et E. Lifchitz : *Théorie de l'élasticité*, Tome 7 de *Physique théorique* (éditions Mir Moscou)
- J. Jouhaneau : *Notions élémentaires d'acoustique - Électroacoustique* (Collection CNAM, éditions Lavoisier - TEC et DOC)

Adresses Internet :

- http://www-reynal.ensea.fr/teaching/amea/acmus_ensea02.pdf
- <http://thierry.chave.free.fr/P2.pdf>
- <http://www.ensmp.fr/Fr/Formation/2emeCycle/IngCivil/Enseignement/Sites/Science-Musique-Histoire/Rapports%202003/Rapport%20gand-joulet.htm>

Figures

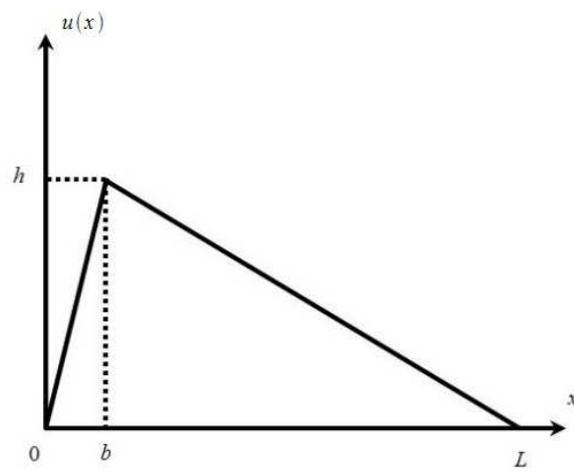


FIG. 1 – Forme initiale d'une corde de clavecin

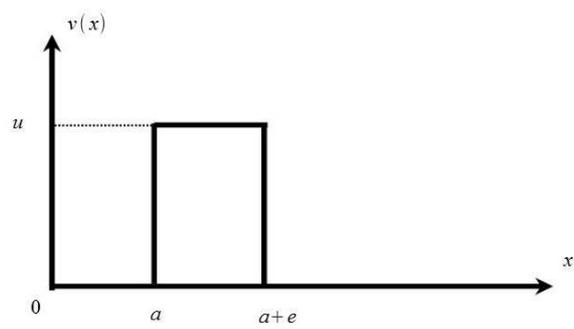


FIG. 2 – Vitesse initiale d'une corde de piano

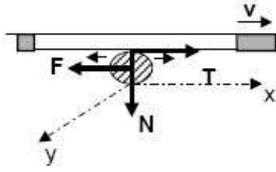


FIG. 3 – Forces agissant sur l'archet

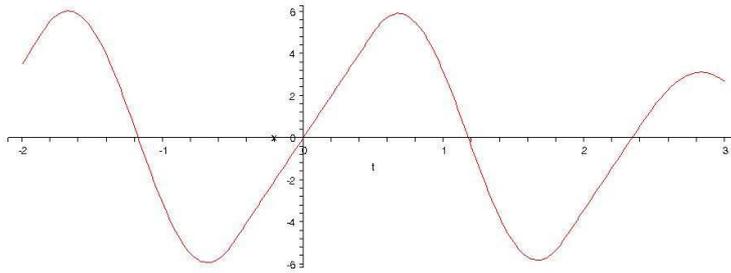


FIG. 4 – Elongation d'une corde de violon en fonction du temps

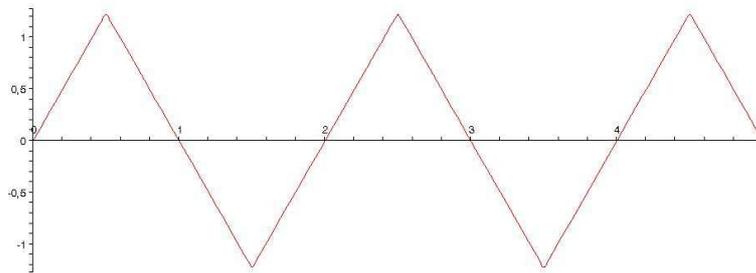


FIG. 5 – Elongation d'une corde de violon en fonction du temps

Inharmonicité d'un piano droit réel

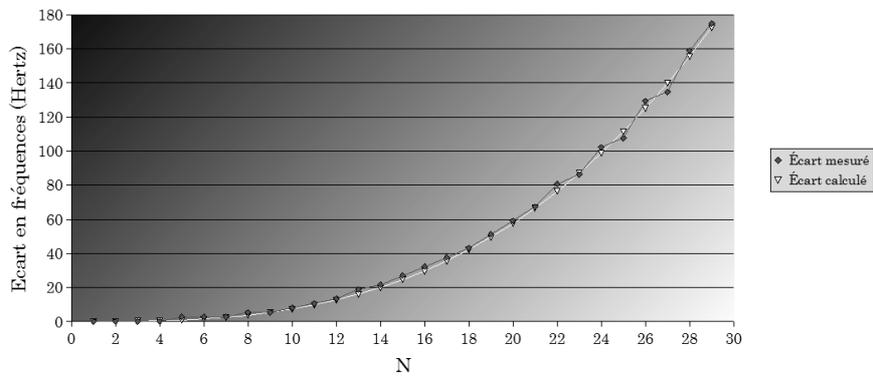


FIG. 6 – Inharmonicité d'un piano réel



FIG. 7 – Le phénomène de battements

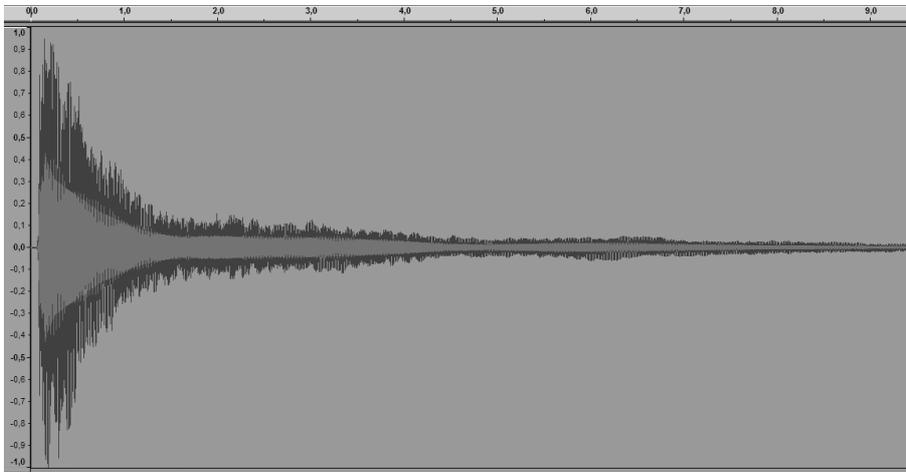


FIG. 8 – Son réel de piano (temps en abscisse, élongation en ordonnée)

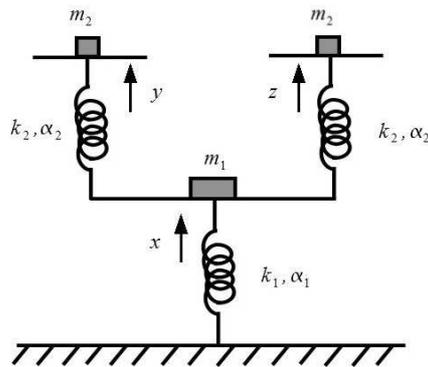


FIG. 9 – Modélisation de l'interaction entre chevalet et cordes dans le piano

Deux cordes identiques, vitesses initiales proches

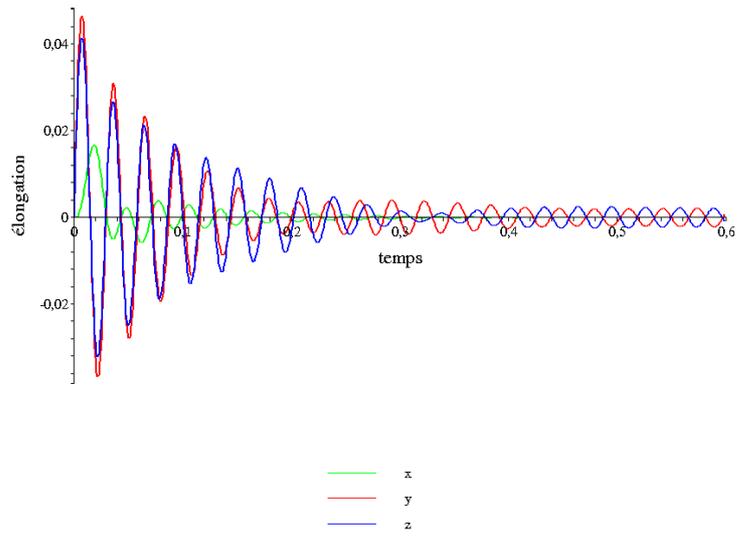


FIG. 10 – Résultat de la modélisation (avec Maple 9)

Deux cordes identiques, une vitesse initiale nulle, l'autre non

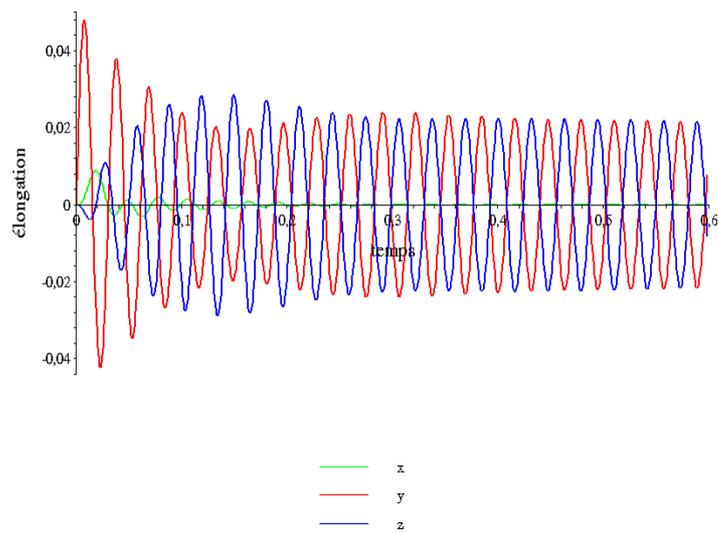


FIG. 11 – Résultat de la modélisation (avec Maple 9)

Annexe

Démonstrations et calculs

Établissement de l'équation de D'Alembert

Faisons le bilan des forces s'appliquant sur un petit élément de corde de masse linéique μ situé entre les abscisses x et $x + dx$, soumis à des oscillations transversales. On oublie volontairement l'influence du poids (il n'intervient que dans la forme de la corde au repos et lui donne une forme en chaînette, d'équation formée d'un cosh).

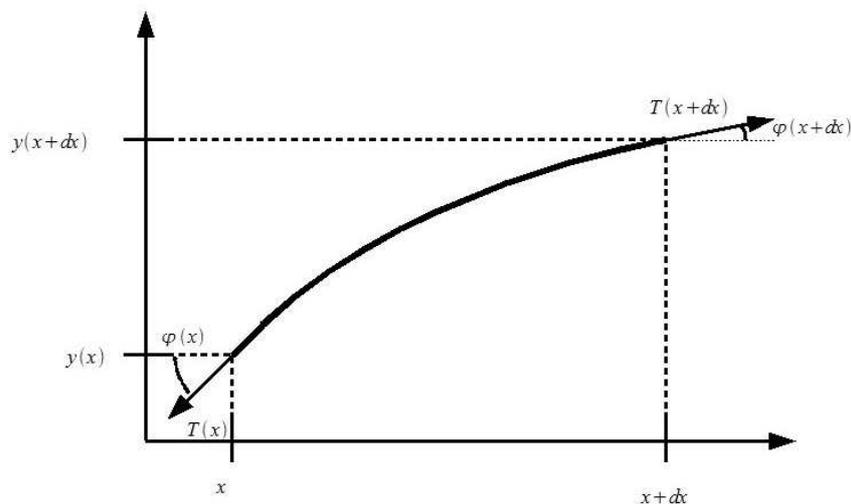


FIG. 12 – Portion élémentaire de corde

La corde est supposée sans raideur, donc T est tangent à la forme de la corde. Donc :

$$T(x + dx) \cos \varphi(x + dx) = T(x) \cos \varphi(x)$$

On suppose que φ reste petit : $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$.

En écrivant la seconde loi de Newton sur cet élément de corde, en projection sur l'axe vertical, on obtient donc :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx) \sin \varphi(x + dx) - T(x) \sin \varphi(x) \approx T \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

Or,

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

On obtient alors l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ou encore en posant $\frac{\mu}{T} = \frac{1}{c^2}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Résolution de l'équation de d'Alembert

On cherche des solutions :

– qui vérifient l'équation de d'Alembert établie ci-dessus,

- sous la forme d’ondes stationnaires (dans un premier temps), c’est-à-dire de fonctions à variables séparées : $y(x, t) = f(x)g(t)$, avec f définie sur $[0, L]$ et g sur $[0, +\infty[$,
- qui vérifient des conditions aux limites : $\forall t, y(0, t) = y(L, t) = 0$ et $\forall x, \begin{cases} y(x, 0) = u(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v(x) \end{cases}$

On suppose que f et g ne sont pas identiquement nulles (dans le cas contraire, $y = 0$: cette solution convient mais elle n’est pas intéressante physiquement). Dans ce cas,

$$\exists \lambda / \forall x, t : \begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 \\ g''(t) + \lambda g(t) = 0 \end{cases}$$

Si on veut détailler, $\exists x_0, t_0 / f(x_0) \neq 0$ et $g(t_0) \neq 0$ et on pose $\lambda = \frac{f''(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g''(t_0)}{g(t_0)}$.

Étude du signe de λ :

- si $\lambda < 0$, alors $\exists \alpha, \beta / \forall x : f(x) = \alpha \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + \beta \sinh(\sqrt{-\lambda}x)$. La condition de nullité en 0 et en L donne que $\alpha = \beta = 0$, ce qui contredit f non identiquement nulle.
- si $\lambda = 0$, alors $\exists \alpha, \beta / \forall x : f(x) = \alpha + \beta x$. La condition de nullité en 0 et en L donne encore $f = 0$ et apporte une contradiction.
- si $\lambda > 0$, alors $\exists \alpha, \beta / \forall x : f(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$. La condition $f(0) = 0$ donne $\alpha = 0$. La condition $f(L) = 0$ donne

$$\exists n \in \mathbb{N} / \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

Cette solution est donc la seule possible.

Cherchons à présent y sous la forme d’une somme d’une série de fonctions y_n de la forme :

$$\forall x, t : y_n(x, t) = \sin(k_n x)(\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t))$$

avec :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Le mode de rang 1 est appelé *mode fondamental*, les autres sont les *harmoniques de rang n*.

On suppose de plus y deux fois dérivable en tout point, terme à terme⁴.

$$\text{De plus, } \forall x, \begin{cases} y(x, 0) = u(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = v(x) \end{cases}.$$

On prolonge u et v par imparité et par L -périodicité. On en déduit qu’il existe deux suites (γ_n) et (δ_n) telles que :

$$\forall x \in [0, L], u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \text{ et } v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

On en déduit, en se plaçant à $t = 0$, que :

$$\forall n, \alpha_n = \gamma_n \text{ et } \beta_n = \delta_n \frac{L}{n\pi c}$$

Résolution de l’équation de d’Alembert modifiée en tenant compte de la rigidité des cordes

On part de l’équation aux dérivées partielles :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

⁴La justification de ce point n’est pas possible si on c’est tient rigoureusement aux fonctions u et v des exemples (piano, clavecin), puisque dans le cas du piano v n’est même pas continue, mais on pourra s’y ramener en remarquant que la réalité physique correspond à des fonctions de classe C^∞ : une corde réelle ne peut pas former de coudes, ni subir de discontinuité de vitesse. On peut aussi se limiter à des sommes partielles au lieu de sommes infinies, dans la décomposition de u et v en séries de Fourier.

Posons, pour simplifier les notations, $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ et $A = \frac{ESK^2}{\mu}$

On cherche encore les solutions sous la forme d'ondes stationnaires : $y(x, t) = f(x)g(t)$, ce qui donne

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t) - Af^{(4)}(x)g(t)$$

On obtient donc, en supposant f et g non identiquement nulles :

$$\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} / \frac{g''}{g} = \lambda \\ \lambda f(x) = c^2 f''(x) - Af^{(4)}(x) \end{cases}$$

L'équation polynomiale associée à l'équation différentielle vérifiée par f est :

$$AX^4 - c^2 X^2 + \lambda = 0$$

Le discriminant de cette équation bicarrée est $\Delta = c^4 - 4A\lambda$

Supposons $\Delta > 0$ (en pratique ce sera le cas, car on observe que la corde oscille, donc $\lambda < 0$, sinon g serait colinéaire à une exponentielle réelle). Dans ce cas, les racines du polynôme vérifient :

$$z^2 = \frac{c^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

De plus, on cherche des solutions sous la forme $f(x) = e^{\alpha x} \sin kx$ (pas de cosinus dans cette expression car $f(0) = 0$), avec $k = \frac{2n\pi}{L}$ (car $f(L) = 0$), si L est la longueur de la corde.

Or, d'après l'expression de z , $z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R}$. Les seules solutions valables sont celles dans $i\mathbb{R}$ (pour avoir une partie imaginaire non nulle, afin d'avoir des solutions oscillantes).

Il faut donc :

$$z^2 = \frac{c^2 - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

avec $\Delta > c^4$ donc $\lambda < 0$ (car $A > 0$) : on a donc bien $z^2 < 0$.

Compte tenu de l'expression désirée de f , il faut $z = \frac{2in\pi}{L}$. Cela donne donc :

$$\frac{-4n^2\pi^2}{L^2} = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 4A\lambda}}{2A}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-4n^2\pi^2 c^2}{L^2} \left(1 + \frac{4\pi^2 A}{L^2 c^2} n^2 \right) \\ &= - \left(n f_0 \sqrt{1 + \beta n^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Remarques sur l'inharmonicité du piano

Cette inharmonicité est notamment très importante pour les accordeurs de piano : elle les oblige à s'écarter un peu du modèle parfait de la gamme tempérée (des octaves découpées en 12 demi-tons égaux) pour sensiblement « tirer les aigus vers le haut et les graves vers le bas », pour améliorer la consonance des accords et des mélodies. Celle-ci dépend en effet de la superposition des harmoniques des différentes notes jouées simultanément ou successivement, selon la théorie de la dissonance de Helmholtz. Cela explique aussi pourquoi les accordeurs de piano sont réticents à l'usage d'accordeurs électroniques, qui donnent une gamme tempérée théorique qui sonne sensiblement moins bien en pratique.

Il faut ici faire une remarque intéressante : il semblerait que pour déterminer la hauteur d'un son, l'oreille humaine se base non pas sur la fréquence du fondamental, mais sur la distance entre deux harmoniques (ou, ici, deux partiels) consécutifs. J'ai vérifié cette affirmation surprenante en générant quelques sons avec le logiciel CSound. En partant d'un son de violon MIDI, j'ai supprimé un à un les six premiers harmoniques du son : le timbre en a été modifié, mais pas la hauteur du

son, ce qui confirme que ce n'est pas la fréquence de l'harmonique d'ordre le plus bas d'un son qui détermine sa hauteur perçue.

Dans le cas d'un son à partiels, cela pose un problème : la distance entre les partiels n'est pas la même d'une hauteur à l'autre. Il semblerait que l'oreille fasse sa « mesure » de distance entre deux partiels dans sa zone de sensibilité maximale (environ 2kHz). C'est un autre élément d'explication quant à l'accordage particulier du piano.

On peut enfin noter que le piano n'est pas le seul instrument à produire des sons à partiels : les cloches, par exemple, produisent aussi des sons inharmoniques, mais dans une mesure beaucoup plus importante. Cependant, la plupart des instruments de musique usuels produisent des sons harmoniques.

Résolution du système correspondant à l'étude son immédiat, son rémanent

Dans le cadre de la résolution avec Maple, une résolution formelle a été possible grâce à la méthode de Laplace. Les solutions obtenues sont sous la forme d'une somme d'exponentielles.

Toutes les constantes physiques du système, a priori inconnues, ont été ajustées « à tâtons » pour arriver au résultat escompté. Je me suis quand même efforcé de respecter une certaine cohérence avec la réalité (chevalet plus lourd et plus amorti que les cordes, ...). Pour des raisons de lisibilité des courbes obtenues, la fréquence des oscillations est cependant ici beaucoup plus faible que dans la réalité : quelques hertz au lieu des quelques centaines en réalité.

J'ai également fait un début de résolution du système à la main, en se ramenant, d'un système de trois équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre, à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dans \mathbb{R}^6 . Le système équivalent s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \text{ de la forme } X' = AX$$

A est alors une matrice réelle 6×6 dont les trois premières lignes sont très simples. Il faudrait alors trouver les éléments propres de cette matrice, mais c'est inutilement fastidieux. Maple donne un résultat numérique, qui correspond logiquement avec la résolution directe du système d'équations différentielles.

Présentation des principaux logiciels utilisés en dehors de Maple : Audacity et Csound

Audacity est un éditeur audio numérique libre, permettant notamment d'analyser et retoucher des sons numériques : visualisation de la forme d'onde et du spectre, etc. CSound est un programme de synthèse sonore très puissant, permettant de reproduire des sons et des effets à la hauteur des meilleurs synthétiseurs. Il reçoit des scripts ASCII contenant les informations sur les instruments et la « partition » à jouer, puis il génère un fichier son. J'ai pour ma part utilisé CSoundAV.