

LP25 – ONDES ACOUSTIQUES

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau :

Commentaires du jury

- 2017 : La contextualisation et des applications de la vie courante ne doivent pas être oubliées dans cette leçon qui se résume souvent à une suite de calculs. De plus, les fluides ne sont pas les seuls milieux dans lesquels les ondes acoustiques peuvent être étudiées.
- 2014 : Cette leçon peut être l'occasion de traiter les ondes acoustiques dans les fluides ou dans les milieux périodiques, certes, mais elle peut aussi être l'occasion de traiter les deux cas qui donnent lieu à des phénoménologies très différentes.
- 2013 : [À propos du nouveau titre] Le candidat est libre d'étudier les ondes acoustiques dans un fluide ou dans un solide élastique.
Jusqu'en 2013, le titre était : Ondes acoustiques dans les fluides.
- 2011, 2012, 2013 : Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le modèle limite de l'onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l'onde sphérique.
Jusqu'en 2008, le titre était : Ondes sonores dans les fluides.
- 2008 : L'aspect énergétique est trop souvent négligé. L'approximation acoustique est souvent mal dégagée. Pour
- 2009, le terme sonore est remplacé par le terme acoustique pour indiquer qu'on peut s'intéresser à des signaux non audibles par l'homme.
- 2007 : L'aspect énergétique est trop souvent négligé. On remarquera que les ondes sonores ne sont pas toutes planes progressives et harmoniques. Jusqu'en 2003, le titre était : Ondes sonores dans les fluides. Approximation acoustique. Aspect énergétique.
- 1999 : Est-il vraiment indispensable de se placer d'emblée dans le cadre formel de la mécanique des fluides ? Un modèle unidimensionnel et scalaire n'est pas sans intérêt pédagogique. Le développement de l'aspect énergétique doit faire apparaître une densité d'énergie et un vecteur de propagation.

Bibliographie

- | | |
|---|-------------------------|
| ↗ <i>Cap prépa PSI</i> , Renvoizé | → Base |
| ↗ <i>Hydrodynamique physique</i> , Guyon, Hulin, Petit | → En complément |
| ↗ <i>Mécanique du solide et des fluides</i> , Boulomié | → Cisaillement. |
| ↗ <i>Cours de Berkeley, 3. Ondes</i> , Crawford | → Généralités |
| ↗ <i>Cap prépa PC*</i> , Renvoizié | → Exo sur l'échographie |

Prérequis

- Mécanique des fluides
- Ondes (d'Alembert et ses solutions)
- Module d'Young, coefficient de Poisson
- Impédance
- Électromagnétisme, vecteur de Poynting

Expériences



Table des matières

1	Onde acoustique dans un milieu fluide	3
1.1	Hypothèses de l'approximation acoustique	3
1.2	Mise en équation	3
1.3	Solutions de l'équation d'onde	4
1.4	Vérifions les hypothèses	4
2	Propriétés de l'onde	5
2.1	Propagation	5
2.2	Aspect énergétique	5
2.3	Cas de l'OPPS : impédance	6
2.4	Intensité sonore	6
2.5	Effet Doppler	7
3	Réflexion, transmission	7
3.1	Impédance	7
3.2	Conditions aux limites	8
3.3	OPP en incidence normal sur un dioptre plan	8
3.4	Applications	9
3.4.1	Échographie	9
3.4.2	Insonorisation par double vitrage	9
3.4.3	Téléométrie acoustique, sonar	9
4	Prise en compte de la viscosité	9
4.1	Atténuation	10
4.2	Ondes de cisaillement	11
4.3	Ondes dans les solides	11
5	Instruments de musique	12
5.1	Rappels sur l'onde stationnaire	12
5.2	Instruments à vent	12
5.2.1	Cas du tuyau symétrique	12
5.2.2	Cas du tube asymétrique	13
5.2.3	Mécanisme d'octave/de douzième	14
5.3	Instruments à percussions	14
5.4	Instruments à cordes	14

Introduction

On a vu les ondes en général, et on a parlé d'ondes acoustiques, mais ces ondes sont nettement plus riches que ce que l'on en a dit jusqu'à maintenant.

Phénoménologie

Il est aisé de se convaincre qu'une onde acoustique est créée par une vibration mécanique. On met une main sur la gorge et wa, ça vibre, cependant il faut aussi un milieu pour transmettre l'onde.



Cloche à vide



Mettre un bippeur dans une cloche à vide.

Une onde acoustique est donc une vibration d'un objet transmise dans un milieu.

1 Onde acoustique dans un milieu fluide

1.1 Hypothèses de l'approximation acoustique

- Fluide parfait

Au repos il est caractérisé par une pression P_0 , une vitesse globale $\vec{v}_0 = \vec{0}$, et une masse volumique ρ_0 uniforme.

- L'onde est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre

$$\begin{cases} P(M, t) = P_0 + p_1(M, t) & \text{avec } p_1 \ll P_0 \\ \rho(M, t) = \rho_0 + \rho_1(M, t) & \text{avec } \rho_1 \ll \rho_0 \\ \vec{v}(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t) & \text{avec } v_1 \ll V_T = \sqrt{\frac{RT}{M}} \text{ vitesse thermique} \end{cases} \quad (1)$$

- On néglige l'influence de \vec{g}

1.2 Mise en équation

On peut écrire la loi de conservation de la masse et la développer en ses deux premiers ordres. On peut alors égaler chaque ordre séparément.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (2)$$

L'équation d'Euler pour les fluides parfaits donne ensuite

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 \quad (3)$$

De plus, l'évolution est supposée isentropique, ce qui signifie que l'on peut définir le coefficient de compressibilité isotope comme

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_S \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1} \quad (4)$$

On combine ces trois équations et on tombe suuuuur...

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \quad (5)$$

Remarque :

- v_1 et ρ_1 vérifient aussi les mêmes équations.
- Pour un gaz parfait, $PV^\gamma = cst$, donc $\chi_S = \frac{1}{\gamma \rho_0}$. De plus $P = \frac{\rho RT}{M}$, donc $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. **OdG** : $\gamma = 1.4$ donc $c = 340$ m/s @ 20°C
- Pour les solides on prend juste $\chi_S = 1/Y$.
- Dans l'eau $c = 1500$ m/s

1.3 Solutions de l'équation d'onde

Les solutions de l'équation sont celles de la leçon ∇ LP24. On a les ondes propagatives et les ondes stationnaires selon les conditions étudiées.

1.4 Vérifions les hypothèses

Vitesse :

On pose U l'ordre de grandeur de vitesse, L celui de distance de variation (longueur d'onde). Alors on a

$$\frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} = \frac{U^2/L}{U/T} = U/C \ll 1 \quad (6)$$

La vitesse particulière est donc inférieure à celle des ondes.



Mesure de la vitesse du son dans l'air



On utilise les émetteurs et récepteurs air/eau, en utilisant la partie air. Avec le GBF on envoie des burst de sinus à 40 kHz, 10 sinus par burst avec des burst de 10 ms.

Isentropie :

La vérification de l'isentropie se fait par vérification de vitesse, on trouve la bonne valeur avec $\gamma = 1.4$.

On peut remarquer qu'une hypothèse d'isothermie nous aurait donné $c = \sqrt{\frac{RT}{M}} \simeq 300$ m/s, et aurait donc été invalidée.

pesanteur :

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_1 \gg \rho_1 \vec{g}$$

Vérification des hypothèses ($L = 120$ dB) :

- $P_1 = \sqrt{\mu_0 c I} = \sqrt{\mu_0 c I_0 10^{L/10}} = 20 \text{ Pa} \ll P_0 = 1 \text{ bar}$.
- $v_1 = \sqrt{\frac{\chi_S}{\mu_0}} P_1 = \frac{20}{410} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-1} \ll c = 340 \text{ m.s}^{-1}$
- $\mu_1 = \mu_0 \chi_S P_1 = \frac{20}{410^2} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3} \ll \mu_0$
- $\mu_0 g = 12 \text{ N.m}^{-3} \ll \left\| \overrightarrow{\text{grad}P} \right\| = \frac{P_0}{\lambda} = 3 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-3}$ à 1 kHz

2 Propriétés de l'onde

2.1 Propagation



Simulation de l'onde

🔗 propagation.py



Montrer la propagation de l'onde, et préciser que les approximations ne s'appliquent plus à 190dB, mais que ça aide à visualiser.

C'est ici une magnifique onde propagative! on est heureux parce que tout le formalisme a été développé dans la leçon précédente! 🔗 LP24

La vitesse de propagation dépend donc grandement du matériaux considéré.



Vitesse du son dans le Dural

🔗 MP30



2.2 Aspect énergétique

On veut définir un vecteur de densité d'énergie, similaire au vecteur de Poynting en électromagnétique, que l'on nomme $\vec{\Pi}$, en W/m^2 , tel que, pour une surface S , on a l'énergie dans le volume fermé par S

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} dV = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad (7)$$

D'où l'équation magique de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \quad (8)$$

Il nous faut maintenant déterminer l'expression de $\vec{\Pi}$ et de e . Un bilan des forces de pression sur la surface S donne immédiatement

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v}_1(M, t) = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

Et on obtient naturellement, en injectant cette équation dans l'équation de conservation, et en se souvenant que $\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial e}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \\
 &= -(P_0 + p_1) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 - \vec{\nabla}(p_1) \cdot \vec{v}_1 \\
 &= (P_0 + p_1) \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) + \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 \right) \\
 &= P_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + \chi_S p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Finalement, on a :

$$e = \frac{1}{2} \chi_S p_1^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}_1^2 \tag{11}$$

2.3 Cas de l'OPPS : impédance

On sait que l'on peut écrire $p_1 = P_0 \cos(\omega t - kx)$, et idem pour v . On a alors un couplage entre accélération et gradient de pression :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}(p_1) \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{k}}{\rho_0 \omega} p_1 \tag{12}$$

Ainsi on trouve $p_1 = \rho_0 c v_1$, et on peut assimiler ce résultat à $u = Zi$ en électricité. Ainsi on définit la notion d'impédance acoustique¹ comme $Z = \frac{p_1}{v_1}$, et ici elle vaut $\rho_0 c$.

remarque : Pour une OPPH, on a $e = e_c + e_p = 2e_c$, et $\vec{\Pi} = ce \vec{u}$

L'énergie se déplace à la vitesse c !

2.4 Intensité sonore

On définit l'intensité sonore comme la puissance moyenne reçue par unité de surface, en W m^{-2}

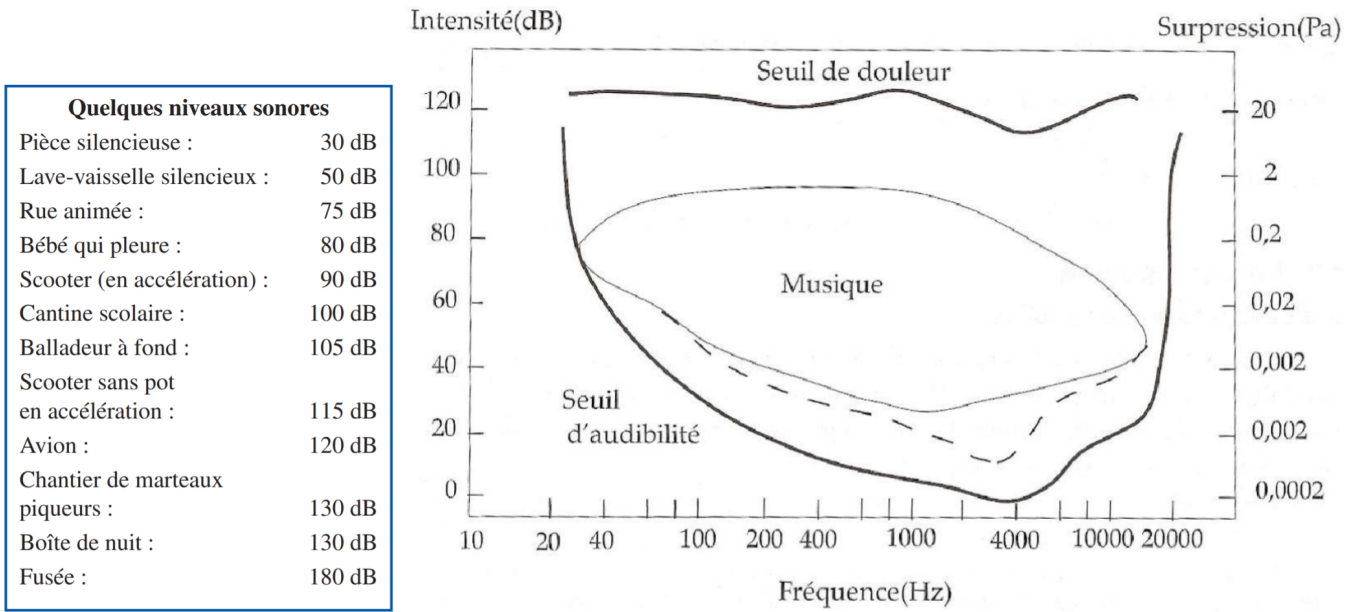
$$I = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{n} \rangle \tag{13}$$

Cependant cette valeur n'est pas très intéressante, car elle varie d'un facteur 10^{12} entre le bruit fait par une mouche et celui fait par un avion au décollage. Il nous faut une échelle log, et c'est là qu'interviennent les décibels

$$L_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{P_1}{P_0} \tag{14}$$

Remarques : pour doubler l'intensité on ajoute 3 dB. On pose I_0 comme le seuil d'audibilité à 4000Hz. L'oreille humaine ne perçoit pas l'intensité pareil partout.

1. Définie plus proprement à la section 3.



2.5 Effet Doppler

⚡ MP25, MP30

3 Réflexion, transmission

3.1 Impédance

Plaçons-nous dans le cas d'OPP se propageant selon $+\vec{e}_x$. On écrit alors $p_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, ce qui donne $\vec{v}_1 = \frac{1}{\rho_0 c} f\left(t - \frac{x}{c}\right) \vec{e}_x = \frac{1}{\rho_0 c} p_1 \vec{e}_x$. On peut alors définir l'**impédance acoustique** d'un milieu par :

$$Z = \frac{\text{cause}}{\text{conséquence}} = \frac{p_1}{v_1} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \tag{15}$$

On exprime Z en $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$. On peut faire une analogie avec le câble coaxial :

Câble coaxial	i	u	Γ	Λ	$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}}$	$Z = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$
Onde acoustique	\vec{v}_1	p_1	ρ_0	χ_S	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi_S}}$	$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}$

OdG : $Z_{\text{eau}} = 1.4 \times 10^{-6} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$Z_{\text{air}} = 410 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

On retiendra $Z_{\text{solide}} \gtrsim Z_{\text{liquide}} \gg Z_{\text{gaz}}$.

Il est intéressant de noter que lorsque l'on crée un instrument de musique, on lui donne généralement un pavillon, ou une casse de résonance. Ce dernier élément est en réalité un dispositif d'adaptation d'impédance, visant à faire passer une quantité d'énergie bien étudiée au milieu, à savoir l'air.

3.2 Conditions aux limites

Lorsqu'une onde passe d'un milieu d'impédance Z_1 à un milieu d'impédance Z_2 , elle doit satisfaire deux relations de continuité :

- la vitesse \vec{v}_1 de l'onde est continue à l'interface car il ne peut y avoir de décollement de matière
- la pression p_1 est continue à l'interface car, si on considère une tranche de fluide à l'interface de section S , un PFD nous dit que la somme des forces extérieures est nulle, *i.e.* la force de pression avant l'interface se compense avec celle après l'interface

3.3 OPP en incidence normale sur un dioptré plan

Considérons que le milieu d'impédance Z_1 occupe le demi-espace $x < 0$ tandis que le milieu d'impédance Z_2 occupe le demi-espace $x > 0$, et on étudie une OPP se propageant dans le sens des x croissants. Quand l'onde incidente arrive à l'interface, elle se décompose en une onde réfléchie se propageant dans le milieu d'impédance Z_1 dans le sens des x décroissants et en une onde transmise se propageant dans le milieu d'impédance Z_2 dans le sens des x croissants. On écrit donc :

$$\begin{array}{l}
 \text{Onde incidente} \\
 \text{Onde réfléchie} \\
 \text{Onde transmise}
 \end{array}
 \begin{cases}
 p_i(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \\
 \vec{v}_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \vec{e}_x \\
 \\
 p_r(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \\
 \vec{v}_r(x, t) = -\frac{1}{Z_1} f\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \vec{e}_x \\
 \\
 p_t(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \\
 \vec{v}_t(x, t) = \frac{1}{Z_2} f\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \vec{e}_x
 \end{cases}
 \quad (16)$$

À partir de ces expressions, on définit les coefficients de réflexion et de transmission en pression :

$$r = \frac{p_r}{p_i} = -\frac{v_r}{v_i} \quad \text{et} \quad t = \frac{p_t}{p_i} = \frac{Z_2 v_t}{Z_1 v_i} \quad (17)$$

On applique les relations de passage au niveau de l'interface à $x = 0$:

$$p_i(x=0, t) + p_r(x=0, t) = p_t(x=0, t) \Rightarrow f(t) + r f(t) = t f(t) \Rightarrow 1 + r = t \quad (18)$$

$$v_i(x=0, t) - v_r(x=0, t) = v_t(x=0, t) \Rightarrow \frac{1}{Z_1} f(t) - \frac{1}{Z_1} r f(t) = \frac{1}{Z_2} t f(t) \Rightarrow \frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} \quad (19)$$

On obtient donc, de façon analogue à l'optique,

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (20)$$

On peut également définir les coefficients de réflexion et de transmission en énergie à partir des vecteurs de Poynting et trouver :

$$R = \frac{\|\vec{\Pi}_r\|}{\|\vec{\Pi}_i\|} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{\Pi}_t\|}{\|\vec{\Pi}_i\|} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (21)$$

On obtient la relation de conservation d'énergie $R + T = 1$.

Remarques

- lorsque $Z_1 = Z_2$, on a $r = 0$ (et $R = 0$) ainsi que $t = 1$ (et $T = 1$) : l'onde incidente est totalement transmise. C'est ce qu'on appelle l'**adaptation d'impédance**, utilisée par exemple en échographie ou pour la caisse de résonance d'un diapason.
- au contraire, si $Z_1 \ll Z_2$, l'onde incidente est totalement réfléchi. C'est le cas par exemple des ondes stationnaires.

3.4 Applications

3.4.1 Échographie

✎ exercice du Cap Prépa

L'échographie consiste à émettre et recevoir via une sonde des ultrasons dans le corps humain et d'analyser les ultrasons réfléchis en attribuant une couleur à la quantité d'ultrasons réfléchis sur un écran. Ainsi, les liquides laissent les ultrasons les traverser et ne renvoient pas d'écho donc ils apparaissent en noir sur l'écran tandis que les parties solides du corps comme les os apparaissent en blanc (comme les gaz et l'air d'ailleurs). Les tissus mous apparaissent quant à eux en nuances de gris selon leur *échogénéité*.

Quand on veut faire une échographie en posant directement la sonde sur la peau, on considère qu'il existe une couche d'air entre la sonde et la peau. Or $Z_{\text{air}} = 440 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $Z_{\text{peau}} = 1.62 \times 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ à 20°C donc le $T = 1 \times 10^{-3}$. Une énorme partie des ultrasons est donc réfléchi sans entrer dans le corps.

Pour remédier à cela, on utilise un gel d'impédance acoustique $Z_{\text{gel}} = 2.42 \times 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ (pour la glycérine) très proche de celle de la peau. Cette adaptation d'impédance entre la peau et la sonde nous permet d'obtenir $T = 0.2$, et donc de bien mieux transmettre les ultrasons.

3.4.2 Insonorisation par double vitrage

On utilise le double vitrage pour améliorer l'insonorisation d'une pièce. On effectue, pour un simple vitrage, le son traverse une interface air-verre puis une interface verre-air alors qu'avec du double vitrage, elle doit traverser en plus une interface air-verre puis une interface verre-air. Ainsi, pour le simple vitrage, le son est atténué de 76 dB ($T_{\text{simple}} = 2.5 \times 10^{-8}$) alors que pour le double vitrage, il est atténué de 152 dB ($T_{\text{double}} = T_{\text{simple}}^2 = 1.6 \times 10^{-15}$).

3.4.3 Télémétrie acoustique, sonar

✎ MP26 - Mesure de longueurs

On envoie l'onde sur un corps massif d'impédance acoustique Z_2 bien plus grande que celle de l'air. L'onde est alors totalement réfléchi et en mesurant le temps nécessaire pour parcourir l'aller-retour et en connaissant sa vitesse, on peut calculer la distance au corps massif.

4 Prise en compte de la viscosité

✎ Boulomié

4.1 Atténuation

Dans un premier temps, on va voir l'impact de la viscosité sur l'atténuation de l'onde quand elle se propage dans un milieu. On peut montrer (cf \blacktriangle GHP p170) que l'équation de Navier-Stokes pour un fluide compressible s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) \quad (22)$$

avec ξ le second coefficient de viscosité. Si on néglige cette seconde viscosité, on obtient

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{v}) \quad (23)$$

Comme pour le début de cette leçon, on exprime ρ , P et \vec{v} sous la forme d'un terme d'ordre 0 et d'un terme d'ordre 1. L'équation de Navier-Stokes, projetée sur \vec{e}_x , devient à l'ordre 1 :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{4\eta}{3} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \quad (24)$$

On rappelle que l'équation de conservation de la masse et la définition de χ_s donnent respectivement

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \chi_s \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1}$$

On relie donc p_1 et \vec{v}_1 par la relation :

$$\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

On dérive donc Navier-Stokes linéarisée par rapport à x puis on insère cette expression pour remplacer v_1 par p_1 et on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} &= -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{4\eta}{3} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \right] &= -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{4\eta}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} \right] \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \right] &= -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{4\eta}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{4\eta}{3\rho_0 c^2} \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2 \partial t} = 0} \quad (26)$$

Pour une OPPH d'expression $p_1 = p_{1,0} e^{i(kx - \omega t)}$, la relation de dispersion s'écrit

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{1 - i\omega \frac{4\eta}{3\rho_0 c^2}}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{1 - i\theta}} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{4\eta\omega}{3\rho_0 c^2} \quad (27)$$

Ordres de grandeur

- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'eau à 20°C, $c = 1480$ m/s, $\eta = 10^{-3}$ Pa s et $\rho_0 = 998$ kg m⁻³ donc $\theta = 3.8 \times 10^{-8}$
- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'air à 20°C, $c = 340$ m/s, $\eta = 10^{-6}$ Pa s et $\rho_0 = 1.2$ kg m⁻³ donc $\theta = 6.04 \times 10^{-8}$

Puisque θ est faible, on peut faire un développement limité pour trouver

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{i\theta}{2} \right) = \pm \frac{2\pi}{\lambda} \left(1 + \frac{i\theta}{2} \right) \quad (28)$$

On remplace l'expression de k dans celle de p_1 et on trouve :

$$p_1 = p_{1,0} \exp\left(-\frac{\pi\theta}{\lambda} x\right) \exp\left(i\left(\frac{\omega}{c} x - \omega t\right)\right) \quad (29)$$

L'onde se propage toujours à la vitesse c mais on voit l'apparition d'un terme d'amortissement de longueur caractéristique

$$\delta = \frac{\lambda}{\pi\theta} = \frac{3c^3\rho_0}{8\pi^2\eta f^2}$$

Ordres de grandeur

- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'eau à 20°C, $\delta = 1.2 \times 10^8$ m
- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'air à 20°C, $\delta = 1.8 \times 10^6$ m

On peut donc considérer que la viscosité n'amortit pas l'onde à notre échelle. Bien sûr, il existe d'autres facteurs d'amortissement comme par exemple l'absorption dans le milieu, sa non-homogénéité, ou le fait qu'on ait des ondes sphériques.

4.2 Ondes de cisaillement

On revient à l'équation usuelle de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v} \quad (30)$$

Cette fois, on pose un champ de vitesse $\vec{v}_1(x, t) = v_x(x, t)\vec{e}_x + v_z(x, t)\vec{e}_z$ et on projette Navier-Stokes sur \vec{e}_z . On obtient

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \quad (31)$$

La relation de dispersion est donc $k_z^2 = i \frac{\omega \rho_0}{\eta}$ donc $k_z = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega \rho_0}{2\eta}}$. On peut donc calculer une nouvelle longueur d'atténuation $\ell = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_0 \omega}}$. Pour l'eau à 20°C et une onde de 1000 Hz, on trouve $\ell = 18 \mu\text{m}$.

De manière générale, **une onde de cisaillement ne se propage pas dans un fluide.**

4.3 Ondes dans les solides

Depuis le début, on parle des ondes acoustiques dans les fluides, mais on sait par expérience qu'elles se propagent également dans les solides. En théorie de l'élasticité linéaire, on montre que le champ de déformation dans un solide satisfait l'équation :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (32)$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. On trouve 2 familles de solution :

- les ondes de compression (ou ondes P) : elles sont longitudinales et se propagent à la vitesse

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

- les ondes de cisaillement (ou ondes S) : elles sont transversales et se propagent à la vitesse

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} < c_p$$

5 Instruments de musique

5.1 Rappels sur l'onde stationnaire

↗ LP24

5.2 Instruments à vent

On modélise un instrument à vent comme une colonne d'air cylindrique (ou conique mais ici cylindrique) de longueur L , à section constante. Le milieu a des conditions aux limites, à savoir des noeuds ou des ventres aux extrémités selon la façon de souffler. On pense donc à une descriptions en ondes stationnaires.

À une extrémité ouverte, on a forcément $P = P_0$, et à une extrémité fermée, on a forcément une vitesse particulière nulle, donc une surpression maximale.

5.2.1 Cas du tuyau symétrique

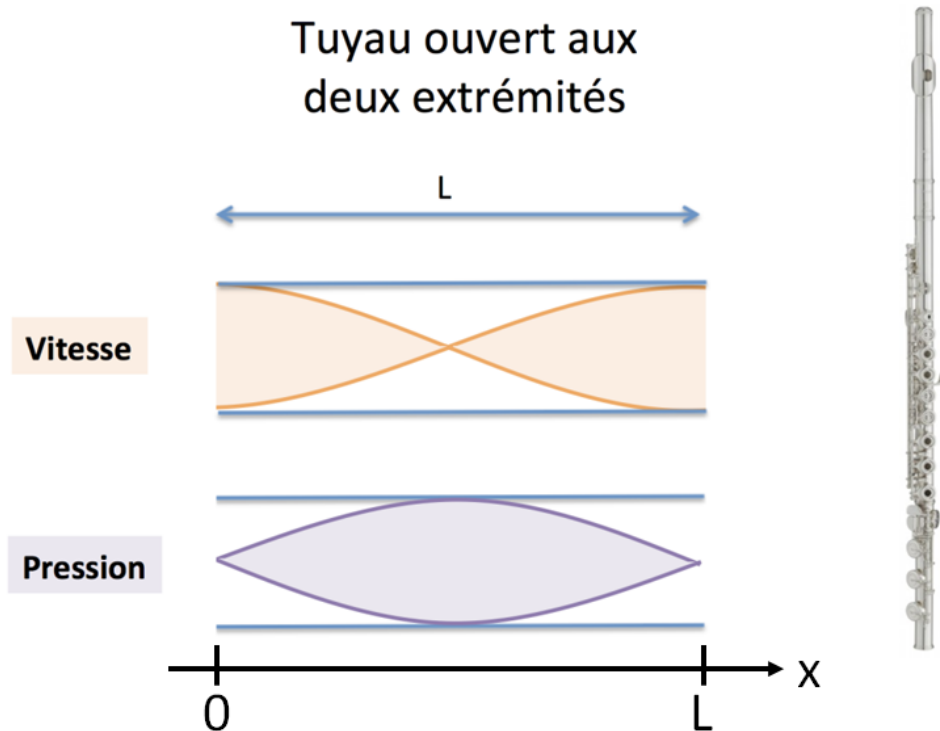


FIGURE 1 – Cas du tuyau symétrique, ici ouvert-ouvert

Si on prend un tuyau symétrique, par exemple un tube de PVC ouvert des deux côtés, et que l'on fait s'établir une onde stationnaire dedans, on a forcément des noeuds de chaque côté, et donc une simili-corde de Melde. On a toutes les fréquences ν_n telles que

$$\nu_n = n \frac{c}{2L} \quad (33)$$

Ce que l'on fait avec une flûte ou en tapant sur un tuyau en pvc avec une sandale, c'est d'exciter toutes les fréquences d'un coup avec un bruit blanc ou plus ou moins centré. Les fréquences qui ne sont pas de $s\nu_n$ s'atténuent alors beaucoup plus vite que les autres, alors que les ν_n sont amplifiées et résonnent.

Acoustique des tubes

↗ MP30



Prédire le son d'un tube de PVC ouvert-ouvert, et le montrer expérimentalement.

Un cuivre c'est essentiellement un tube que l'on excite avec un bruit Gaussien à la bouche, pour sélectionner une harmonique en particulier.

5.2.2 Cas du tube asymétrique

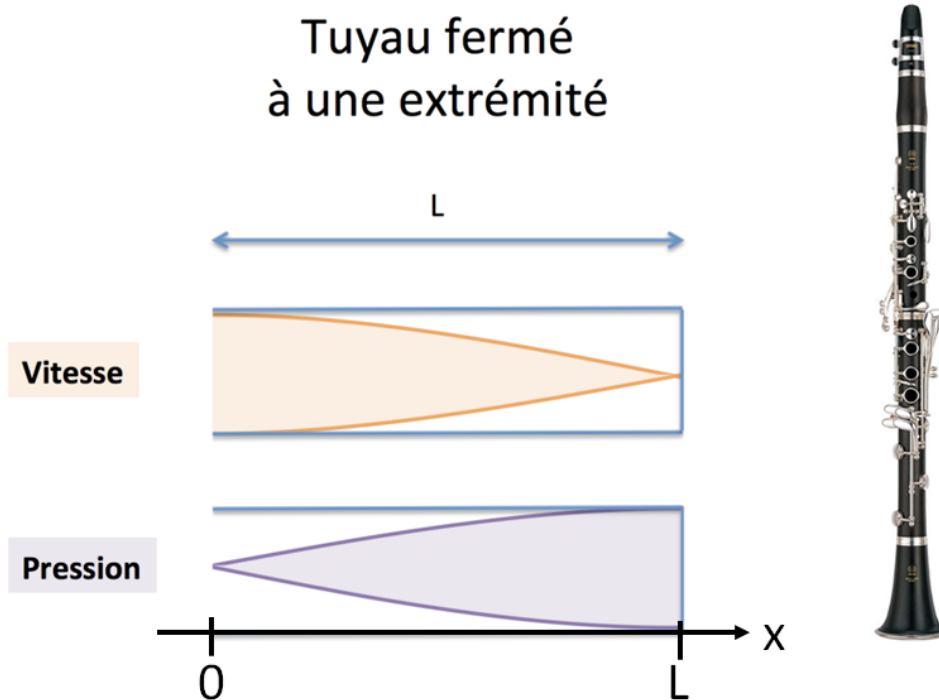


FIGURE 2 – Cas de la clarinette.

Si un tube est asymétrique cependant, comme par exemple si on bouche un côté du tube, ou si on met un système de vibration d'un côté (une anche), on a plus que les harmoniques impaires :

$$\nu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L} \quad (34)$$

Ainsi une clarinette deux fois plus courte qu'une trompette aura la même tessiture. Elle n'aura pas les mêmes harmoniques cependant.

OdG : Trompette : 140cm, clarinette : 66cm.

Acoustique des tubes

↗ MP30



Prédire le son d'un tube de PVC ouvert-fermé, et le montrer expérimentalement. C'est une octave en dessous du ouvert-ouvert.

5.2.3 Mécanisme d'octave/de douzième

Un mécanisme d'octave ou de douzième est une clé sur un instrument à vent qui permet de passer d'une note à une de ses harmoniques. Il fonctionne en perçant un trou dans la colonne d'air à un endroit très précis : pour une octave, à la moitié de la colonne, pour une douzième, à un tiers. Il est à noter que la douzième peut exister pour les tubes cylindriques et les tubes coniques, mais que l'octave n'existe que pour les tubes coniques. En effet leur forme leur donne une plus grande richesse d'harmoniques, faisant apparaître les harmoniques paires, dont l'octave.

5.3 Instruments à percussions

🔗 Dunod p846

🔗 http://olivier.granier.free.fr/Seq17/co/rappels-de-cours-ondes_meca-son-solide.html

Les instruments à percussion pour leur part répondent aux équation des membranes. C'est à dire que l'on excite avec un bruit blanc (choc) une membrane qui va osciller ensuite en réponse. Pour faire les calculs, il faut passer en calculs d'élasticité, et écrire, avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{v} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (35)$$

On se retrouve alors à gère des ondes longitudinales et transverses, comme dans la section 4. $\Delta = \Delta_L + \Delta_T$. Après un calcul que je préfère ne pas détailler, on obtient :

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \simeq 3300 \text{ m s}^{-1} \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \simeq 2000 \text{ m s}^{-1} \quad (36)$$

OdG : on prend $E \sim 10$ GPa et $\nu \sim 0.2$ pour un instrument tel qu'un xylophone **en bois**.

5.4 Instruments à cordes

Les instruments à corde sont très bien détaillés dans le sujet 2009 de composition de physique de l'agreg : <http://www.agregation-physique.org/images/rapports/2009/05.pdf>, et dans le 🔗 MP30.

Ce qu'il faut en retenir, c'est que la décroissance des harmoniques dépend de la forme initiale de la corde et de son excitation de départ.

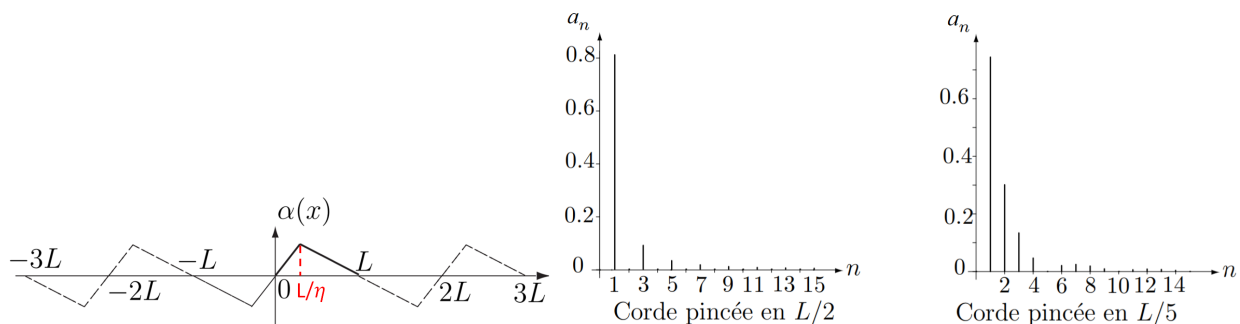


FIGURE 3 – La forme des harmoniques pour le clavecin, en $1/n^2$. La guitare est en $1/n^3$ et le piano en $1/n$.

Remarque : En fonction de l'endroit où on pince, on peut avoir que des harmoniques impaires, et épurer le son, comme par exemple quand on fait des harmoniques avec une guitare.