

LP26 – PROPAGATION AVEC DISPERSION

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L3

Commentaires du jury

- 2016 : Il s'agit d'une leçon qui porte sur la dispersion et non sur la propagation.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir sur les notions de vitesse de groupe et de vitesse de l'énergie qui ne s'identifient pas forcément.
Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.
- 2012, 2013 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
- 2009, 2010 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.
- 2007, 2008 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
- 2001 : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.
- 2000 : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que k_x , k_y , k_z et ω sont reliés par la relation de dispersion.
- 1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.
- 1998 : Un battement n'est pas un paquet d'ondes. Le choix d'une représentation de Fourier spatiale ou temporelle pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie.

Bibliographie

- ↗ Un bouquin de prépa au choix → La base
- ↗ *Hprépa, Ondes*, **Brébec** → La base et câble coaxial
- ↗ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit (GHP)** → Ondes gravito-capillaires
- ↗ Poly de P. Lidon <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document> → Ondes gravito-capillaires
- ↗ *BUP 649* → Des discussions et rappels intéressants
- ↗ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** → Plasma et diélectrique si on a peur de manquer
- ↗ *Tec&Doc PC/PC**, **Olivier** → Modèle de l'électron élastiquement liée

Prérequis

- Équation de d'Alembert, relation de dispersion
- Analyse de Fourier
- Câble coaxial sans perte
- Plasma
- Mécanique des fluides
- Électromagnétisme, milieux diélectriques

Expériences



Table des matières

1	Notion de dispersion (théorie utile)	3
1.1	Vitesse de phase et relation de dispersion	3
1.2	Notion de paquet d'onde	4
1.3	Effet de la dispersion	5
1.4	Bilan/résumé	6
2	Dispersion dans un câble coaxial	6
2.1	Équation des télégraphistes	6
2.2	Condition de Heaviside	8
3	Dispersion dans un diélectrique	8
3.1	Équation de propagation	8
3.2	Modèle de l'électron élastiquement lié, version 1	9
3.3	Modèle de l'électron élastiquement lié, version 2	10
4	Dispersion dans un plasma	12
4.1	Hypothèses	12
4.2	Relation de dispersion :	12
4.3	Vitesses	14
5	Dispersion des ondes gravito-capillaires	14
5.1	Ondes gravito-capillaires	14
5.2	Expression du potentiel des vitesses	15
5.3	Relation de dispersion	15
5.4	Expérience	16
5.5	Vitesse de phase, vitesse de groupe	16

Introduction

En 1666 I. Newton fit traverser à un prisme un rai de lumière blanche et observa la séparation de la lumière blanche en plusieurs couleurs. Ainsi, en vertu de la loi de Snell-Descartes déjà connue à l'époque de cette expérience, il fut possible de déduire que la vitesse de la lumière dépendait, dans le verre, de sa couleur. C'est ce qu'on appelle la dispersion. Nous allons donc tenter d'appréhender le phénomène de dispersion dans un cas général, puis ensuite nous nous intéresserons à deux cas de dispersion ayant une application dans les domaines des télécommunications.



Dispersion du blanc par un prisme

Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur.

1 Notion de dispersion (théorie utile)

1.1 Vitesse de phase et relation de dispersion

➤ Physique tout en un MP-MP* p.555, Sanz.

On a déjà vu qu'une OPPH dans le vide suit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

On peut alors écrire l'onde comme $\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\vec{e}_y$. On notera $\vec{E} = E_0 \exp(i\phi(x, t))\vec{e}_y$. Ce qui va nous intéresser aujourd'hui c'est l'évolution de cette phase dans l'espace et le temps !

Si on cherche les événements équiphasés de l'espace temps, on cherche (x, t) tel que $\phi(x, t) = C$ constante. On peut alors écrire l'égalité suivante en deux événements équiphasés :

$$\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2 = C \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2)$$

On a ainsi défini la vitesse à laquelle une phase se déplace, la **vitesse de phase**

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (3)$$

Si on réinjecte l'expression de E dans d'Alembert, on trouve la **relation de dispersion** de l'onde, ici

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4)$$

Cette relation de dispersion nous permet de trouver l'expression de la vitesse de phase en fonction d'une seule variable, k ou ω . Dans le cas de l'OPPH on obtient même, miracle :

$$v_\phi = c \quad (5)$$

Définition : On dira d'un milieu qu'il est **dispersif** si sa vitesse de phase dépend de ω . Sinon il sera nommé non-dispersif. Le vide est, pour les ondes électromagnétiques, un milieu non dispersif !

1.2 Notion de paquet d'onde

Une OPPM, bien qu'utile mathématiquement, c'est pas génial du point de vue de la physique, parce que ça a une énergie et une extension infinis. Pour construire une onde qui a du sens physiquement, donc un début et une fin, on constitue un **paquet d'onde**.

Pour construire un paquet d'onde, il suffit de multiplier une OPPH nommée porteuse à une enveloppe, c'est à dire une *forme générale* de l'onde. Dit comme ça a n'a pas l'air cool, mais par décomposition de Fourier on peut décrire l'opération comme une intégrale d'OPPH, et donc profiter de la linéarité des équations.

$$f(x, t) = P \times G = \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) G(x, t) \tag{6}$$

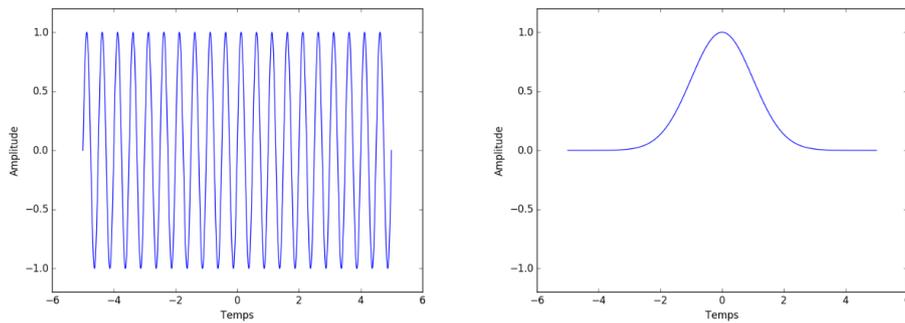


FIGURE 1 – Exemple de porteuse et d'enveloppe

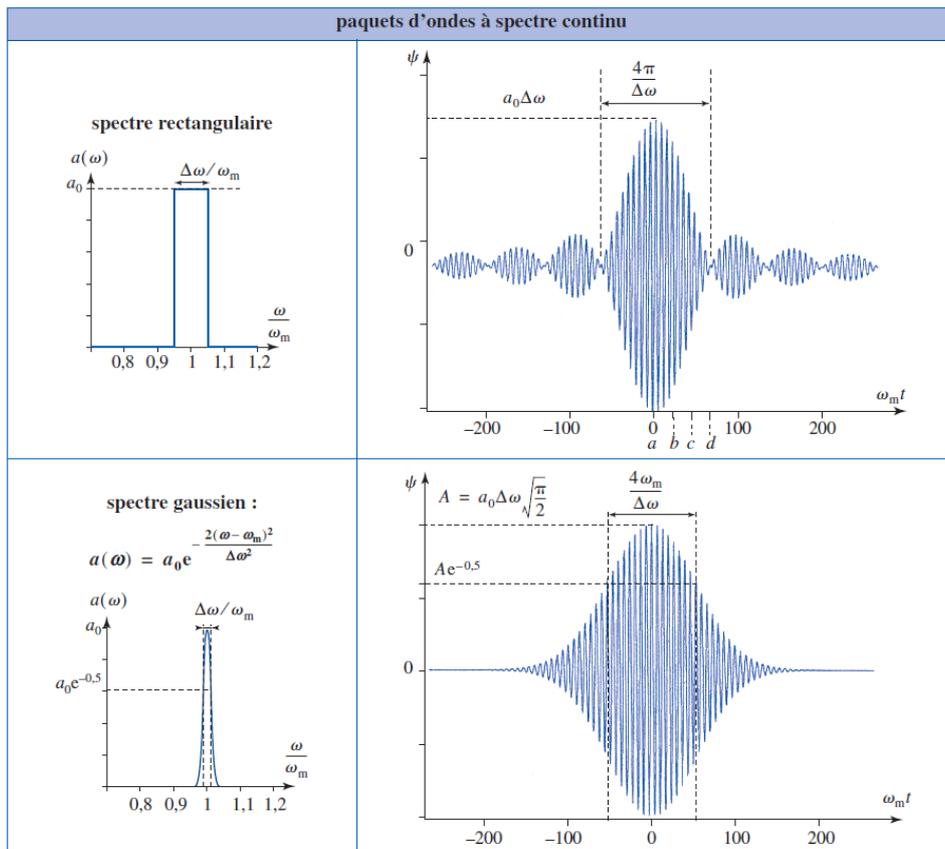


FIGURE 2 – Exemple de paquets d'ondes et leur spectre.

On rend ainsi au signal son énergie finie. Mais une question très importante se pose, est-ce que le paquet d'onde

va à la même vitesse que l'onde elle-même ? Est-ce que l'on va voir défiler des franges à l'intérieur ? On va déterminer la vitesse du paquet !

1.3 Effet de la dispersion

Pour cela écrivons le paquet d'onde avec le formalisme de Fourier :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{\mathcal{R}} \exp(i(\omega t - k(\omega)x)) A(\omega) d\omega \\ &= \exp(i(\omega_0 t - k_0 x)) \int_{\mathcal{R}} \exp(i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)) A(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

On a ainsi directement l'expression de $G(x, t)$ comme d'une intégrale :

$$\int_{\mathcal{R}} \exp(i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)) A(\omega) d\omega \quad (8)$$

Afin de poursuivre les calculs, on va supposer que la distribution des fréquences est piquée autour de ω_0 , ce qui revient à dire que le signal que l'on envoie ressemble bien à une sinusoïde. La dépendance de k en ω devient alors

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \times (\omega - \omega_0)$$

E, réinjectant cela dans l'expression de l'enveloppe on trouve sa vitesse de propagation.

$$G(x, t) = G\left(x = 0, t - \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} x\right) \quad (9)$$

On nomme **vitesse de groupe** la vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe, que l'on assimilera à la vitesse de l'enveloppe (c'est la même à l'ordre 1, mais l'ordre 2 change beaucoup de choses...) :

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} \quad (10)$$

On appelle cette vitesse la vitesse de groupe. C'est la vitesse du centre de l'enveloppe du paquet d'onde. On remarque qu'elle peut être différente de la vitesse de phase, on observe alors un phénomène de glissement de phase, l'enveloppe n'évolue pas dans l'espace à la même vitesse que la phase. Dans notre cas cependant, $v_g = v_\phi$, mais on va vite trouver un contre-exemple (cf partie suivante).

Si on effectue maintenant un développement plus précis, à l'ordre 2, on obtient :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = k_0 + (\omega - \omega_0) \alpha(\omega) \quad (11)$$

Alors on a une nouvelle expression de l'enveloppe :

$$G(x, t) = \int_{\mathcal{R}} \exp(i(\omega - \omega_0)(t - \alpha(\omega)x)) A(\omega) d\omega \quad (12)$$

Alors on a une vitesse de groupe qui varie pour les différentes pulsations du groupe, ce qui a pour conséquence de l'étaler au cours de sa propagation !

Intéressons nous en particulier au cas du paquet d'onde Gaussien, parce que la TF d'une Gaussienne est une Gaussienne, ce qui simplifie grandement nos calculs.



Dispersion du paquet d'onde

🔗 `dispersion_2_images.py`



On y voit que le paquet va moins vite que la porteuse, et que le paquet s'étale au fur et à mesure de son avancée, parce que ces différentes composantes ne vont pas à la même vitesse.

On utilise ici une relation de dispersion de type Klein-Gordon $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$. Ce type de relation de dispersion est présent dans les plasmas ou dans les métaux pour les hautes fréquences. On remarque qu'au cours de la propagation, les courtes longueurs d'onde "vont plus vite", et se retrouvent donc à l'avant du paquet d'onde. Au contraire, les grandes longueurs d'onde sont "à la traîne".

Justification de l'outil informatique : Ici, nous sommes à un point de la leçon où les formules sont des transformées de Fourier inverse, donc exprimées sous forme d'intégrale, qui sont des notions tout à fait nouvelles pour les élèves.

Je pense être très difficile de se représenter les effets de telles formules. J'ai donc codé en Python un programme calculant ces expressions dans un cas simple et connu pour pouvoir illustrer ces formules. En effet, le sujet de la leçon reste la propagation d'onde, qui est un phénomène très parlant et plein d'illustrations expérimentales dans la vie courante. Le résultat de ce programme, affichant deux images côte à côte, qui permet de "vérifier" que le paquet d'onde s'est effectivement propagé avec déformation est, à mon sens, beaucoup plus marquant qu'une formule générale qu'il faudrait particulariser en fonction de différentes relations de dispersion. J'ai également choisi de coder un programme qui calcule effectivement les intégrales du cours pour pouvoir changer la forme du paquet d'onde initial, la relation de dispersion, et pouvoir alors illustrer les effets d'autres relations de dispersion sur la propagation qui pourraient être vues pendant l'année (ce choix de calcul d'intégrale se ressent malheureusement sur la complexité du programme).

1.4 Bilan/résumé

À l'ordre 0, on obtient la vitesse de phase, qui correspond à la vitesse de l'onde monochromatique.

À l'ordre 1, on obtient la vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse de l'enveloppe sans déformations. On observe et explique le phénomène de glissement de phase.

Au ordres supérieurs, on obtient la dépendance en ω de la vitesse de groupe, et donc la dispersion et l'étalement du paquet d'ondes.

Effet Kerr optique

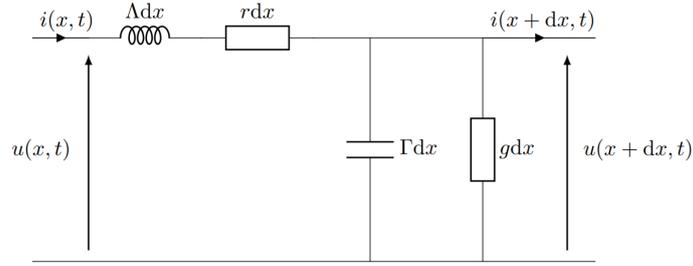
On introduit des non-linéarités pour compenser la dispersion. On retombe alors sur d'Alembert.

Définition : Lorsque $v_\phi > v_g$, on parle de dispersion **normale**. Dans le cas contraire, c'est de la dispersion anormale. On trouve de la dispersion anormale dans certaines vapeurs de mercure par exemple.

2 Dispersion dans un câble coaxial

2.1 Équation des télégraphistes

On modélise un tronçon de longueur dx de câble coaxial par le circuit suivant :



La loi des mailles dans la première maille du circuit permet d'écrire

$$u(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + r dx i(x, t) + u_{\text{condensateur}} \quad (13)$$

Or la tension $u_{\text{condensateur}}$ aux bornes du condensateur est identique à celle de la résistance $\frac{1}{g dx}$, qui est identique à $u(x + dx, t)$. On obtient donc

$$u(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + r dx i(x, t) + u(x + dx, t) \quad (14)$$

On obtient donc une première équation intéressante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -r i - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (15)$$

On peut également établir deux lois des noeuds :

- au premier noeud, en notant I l'intensité dans le fil allant vers le second noeud, on a

$$i(x, t) = \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t} + I \quad (16)$$

- au second noeud, en remarquant qu'on a une résistance $R = \frac{1}{g dx}$, on a

$$I + g dx u(x + dx, t) = i(x + dx, t) \quad (17)$$

On peut écrire $g dx u(x + dx, t) \simeq g dx u(x, t)$ en en faisant qu'une erreur d'ordre 2.

On combine ces deux lois des noeuds pour obtenir une deuxième équation intéressante :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -g u - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (18)$$

Les grandeurs u et i peuvent être découplées en écrivant l'équation

$$\partial_x(\text{1ère équation}) = -r(\text{2nde équation}) - \Lambda \frac{\partial}{\partial t}(\text{2nde équation})$$

On obtient alors l'équation de propagation dans le câble coaxial aussi appelée **équation des télégraphistes** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r \Gamma + g \Lambda) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u \quad (19)$$

Injectons maintenant dans cette équation une OPPH avec $u(x, t) = u_0 e^{j(kx - \omega t)}$. On a alors

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 + j \omega (r \Gamma + g \Lambda) - r g \quad (20)$$

On trouve donc la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 + j \frac{g}{\omega \Gamma}\right) \left(1 + j \frac{r}{\omega \Lambda}\right)} \quad (21)$$

2.2 Condition de Heaviside

On avait défini la vitesse de phase par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

En réalité, cette formule n'est pas du tout la bonne. En effet, si on l'applique au cas du câble coaxial où à n'importe quel cas où k est complexe (donc tous les cas avec atténuation, comme par exemple les ondes évanescentes), on trouve une vitesse de phase complexe... La vraie formule de la vitesse de phase est en réalité

$$v_\phi = \frac{\omega}{\Re(k)} \quad (22)$$

On ne considère que $\Re(k)$ car la partie imaginaire de k ne participe pas à la phase de l'onde (et donc elle ne participe pas à sa propagation) mais à son amplitude (et donc à son atténuation).

On remarque que dans le cas où $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$, la relation de dispersion se simplifie et on obtient

$$k = \pm \omega \sqrt{\Gamma \Lambda} \sqrt{1 + j \frac{g}{\omega \Gamma}} \quad (23)$$

On en déduit immédiatement la vitesse de phase : $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$. On remarque qu'elle est indépendante de ω ou de k , ce qui signifie que le milieu est non-dispersif. La condition $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$ est alors appelée la **condition de Heaviside**. Remarquons cependant que l'onde continue à s'atténuer lors de sa propagation à cause de la partie imaginaire de k . Le câble coaxial a été largement utilisé au XXème siècle pour transmettre des signaux analogiques. Pour un signal analogique aussi bien la phase que la "forme" du signal est essentiel à l'information, d'où la nécessité de minimiser la dispersion quitte à s'accommoder d'un effet d'atténuation.

3 Dispersion dans un diélectrique

3.1 Équation de propagation

Un **matériau diélectrique** est un matériau qui possède un moment dipolaire permanent ou qui est susceptible d'en acquérir un lorsqu'il est soumis un champ électrique. Si on suppose le milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope, les ondes électromagnétiques satisfont les très fameuses équations de Maxwell qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \vec{0} - \Delta \vec{E} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (25)$$

On trouve alors l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} + \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (26)$$

La relation de dispersion correspondant est donc simplement $k^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \omega^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$

L'étude de la dispersion dans un milieu électrique nécessite donc de connaître l'expression de n^2 . Pour obtenir cette expression, on va utiliser le modèle de l'électron élastiquement lié.



3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 1

↗ Tec&Doc p745-746

On considère l'action d'un champ électromagnétique sur un atome constitué d'un proton, supposé immobile, et d'un électron qui subit alors 3 forces :

- la force de Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{E}(t)$, en supposant que $\vec{E}(t)$ est uniforme sur les dimensions d du dipôle (approximation des grandes longueurs : $\lambda \gg d$)
- une force de rappel élastique $\vec{F}_{\text{rappel}} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ qui est valable si le système ne s'éloigne pas trop de sa position d'équilibre
- une force de frottement modélisée par $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau} \dot{\vec{r}}$

En appliquant le PFD à l'électron, on obtient :

$$m \ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} + q\vec{E}(t) - \frac{m}{\tau} \dot{\vec{r}} \quad (27)$$

En prenant comme solution une OPPH de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$ et $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, on obtient

$$\vec{r} = \frac{q}{m} \frac{\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \quad (28)$$

On peut alors exprimer la polarisation \vec{P} du milieu de 2 façons :

$$\begin{cases} \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} & \text{où } \chi_e \text{ est la susceptibilité électrique} \\ \vec{P} = n^* \vec{p} = n^* q \vec{r} = \frac{n^* q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E} & \text{où } n^* \text{ est la densité électronique} \end{cases} \quad (29)$$

On peut donc en déduire

$$\chi_e = \frac{n^* q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n^* q^2}{m\varepsilon_0} \quad (30)$$

On obtient finalement

$$n(\omega)^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} - i\frac{\omega}{\tau} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (31)$$

On peut écrire $n(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$ où n'' est l'indice d'absorption car il n'intervient que dans la variation de l'amplitude (donc l'atténuation de l'onde) tandis que $n'(\omega)$ est l'indice de dispersion car il intervient dans la phase de l'onde (et donc sa propagation). Dans **l'approximation des milieux peu denses** (comme un gaz), $|\chi_e| \ll 1$ et on peut faire un DL de n pour obtenir $n = \sqrt{1 + \chi_e} \simeq 1 + \frac{1}{2}\chi_e$ et donc écrire

$$n'(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (32)$$

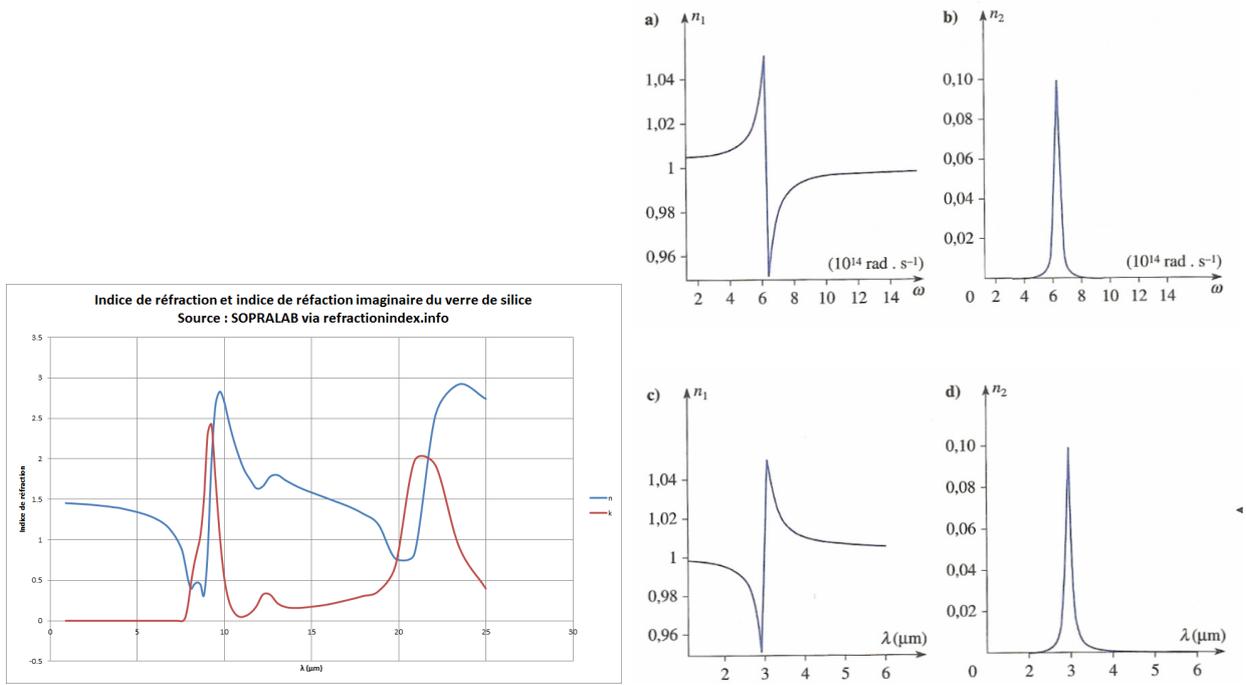


FIGURE 3 – Mesures de n' et n'' en fonction de λ et ω (à gauche, figure tirée du  Maulas EM 2e année) et comparaison avec la théorie (à droite).

En dehors du domaine d'absorption, *i.e.* $\omega \ll \omega_0$, on a $n'' = 0$ donc $n = n'$. Tout se passe comme si n , ε_r et χ_e étaient réels et on retrouve la notion d'indice optique. Dans ce cas, on écrit

$$n^2 = (n')^2 = 1 + \chi_e' + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (33)$$

Un développement limité en $\frac{\omega}{\omega_0}$ permet alors d'obtenir

$$n' \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \iff \boxed{n' = A + \frac{B}{\lambda^2}} \quad (34)$$

On a retrouvé la **loi de Cauchy** ! Dans le domaine du visible,

$$n' = 1 + 1.36 \times 10^{-4} + \frac{1.06 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

Cela $\lambda_0 = 88$ nm donc loin de λ , ce qui valide l'hypothèse selon laquelle on était loin du domaine d'absorption. Cette loi est importante car elle explique les observations expérimentales des réseaux et des arcs-en-ciel.

Remarque

Il faut ici préciser que les deux aspects que l'on a montré de la dispersion (étalement du paquet d'onde et dispersion par le prisme) ne proviennent que de la dépendance non linéaire de n' en ω , et donc traduisent tous deux bien la dispersion sans être contradictoires.

3.3 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 2

Personnellement j'aime moins cette version... mais je la met quand même parce que c'est une autre façon de poser les choses.

Dans cette autre version, le but est de connaître n en exprimant le courant de déplacement dans le diélectrique $\overrightarrow{j}_{\text{diélec}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ sous la forme de la somme du courant de déplacement $\overrightarrow{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ dans le vide et d'un courant de polarisation \overrightarrow{j}_P .

Pour calculer \overrightarrow{j}_P , on se place dans un volume V pour voir écrire :

$$\overrightarrow{j}_P = \sum_{\text{électrons } \ell} \frac{-e \partial \overrightarrow{r}_\ell}{V \partial t} \quad (35)$$

On suppose que ce $V \ll \lambda^3$ pour que tous les électrons soient soumis à un champ \overrightarrow{E} de même intensité et de même direction. On considère que les électrons sont réunis dans des groupes où tous les électrons d'un groupe ont les mêmes propriétés (notamment la même vitesse). En notant N_α la densité électronique du groupe d'indice α et $\overrightarrow{r}_\alpha$ sa position, on obtient

$$\overrightarrow{j}_P = \sum_{\text{groupes } \alpha} (-e N_\alpha) \frac{\partial \overrightarrow{r}_\alpha}{\partial t} \quad (36)$$

Pour chaque électron, on applique le PFD en considérant qu'ils sont soumis à une force de Lorentz $-e \overrightarrow{E}$, une force de rappel $-K \overrightarrow{r}$ et une force de frottement $-f \overrightarrow{v}$:

$$m \ddot{\overrightarrow{r}} = -K \overrightarrow{r} - e \overrightarrow{E} - f \dot{\overrightarrow{r}} \quad (37)$$

En prenant une OPPH, on obtient $\overrightarrow{r} = \frac{-e}{K + i\omega f - m\omega^2} \overrightarrow{E}$. Quand on applique cette relation au groupe d'électrons, on obtient

$$\overrightarrow{j}_P = \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha \frac{e^2}{K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad (38)$$

On obtient donc finalement

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j}_{\text{diélec}} = \overrightarrow{j}_D + \overrightarrow{j}_P = \left[\varepsilon_0 + \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha \frac{e^2}{K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2} \right] \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \quad (39)$$

avec

$$n^2(\omega) = \varepsilon_r = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha \frac{e^2}{\varepsilon_0 (K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2)} \quad (40)$$

On peut simplifier l'équation de n^2 en posant :

$$\omega_{0,\alpha} = \sqrt{\frac{K_\alpha}{m}} D_\alpha = \frac{N_\alpha e^2}{\varepsilon_0 K_\alpha} \quad (41)$$

$$\Gamma_\alpha = \frac{f_\alpha}{m\omega_{0,\alpha}}$$

avec $\omega_{0,\alpha}$ la pseudo-pulsation l'oscillateur harmonique amorti formé par un électron du groupe α , D_α est un coefficient représentant la contribution du groupe d'électron α à l'indice du milieu, et Γ_α est le facteur rendant compte de l'importance des phénomènes dissipatifs dans le l'oscillateur. Ainsi on a :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{1 + i\Gamma_\alpha \frac{\omega}{\omega_{0,\alpha}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2}} \quad (42)$$

Lorsque $\omega = \omega_{0,\alpha}$, on observe un pic pour la partie imaginaire de n . On en déduit que les $\omega_{0,\alpha}$ correspondent aux bandes d'absorption du milieu diélectrique. Sachant que $\Gamma \simeq 10^{-2}$, on peut encore simplifier l'expression de n en se plaçant aisément dans les cas où $|\Gamma| \ll \left| \frac{\omega_{0,\alpha}}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_{0,\alpha}} \right|$, *i.e.* dans les cas où on est loin des bandes d'absorptions. On obtient alors l'équation de Sellmeier :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2}} \quad (43)$$

Il reste une hypothèse à faire pour obtenir la **loi de Cauchy** : on suppose que toutes les bandes d'absorption sont loin du domaine du visible, dans l'ultraviolet. On a donc $\frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2} \ll 1$ et on obtient

$$n^2(\omega) \simeq 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} D_\alpha \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2} \right) \quad (44)$$

$$n^2(\omega) \simeq 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} D_\alpha + \omega^2 \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{\omega_{0,\alpha}^2}$$

$$\boxed{n \simeq A + B\omega^2} \quad (45)$$

Idées de manip/simulation

- **Dispersion de la lumière blanche par un prisme** Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-lode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur, maintenant discuter de la largeur de la bande rouge et de la bande violette.
- **Simulation de la dispersion de paquet d'onde dans le verre**
Parler de la différence avec la propagation le câble coaxial, par exemple le paquet d'onde qui ne se déforme pas de manière symétrique.

4 Dispersion dans un plasma

➤ plasma.pdf : http://olivier.granier.free.fr/cariboost_files/PC-ondes-EM-plasma.pdf

4.1 Hypothèses

Un plasma est un milieu ayant les propriétés suivantes :

- Il est constitué d'ions positifs supposés fixes dans un gaz d'électrons mobiles. Le tout est électriquement neutre
- Les vitesses sont non relativistes

On le suppose parcouru d'une onde $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

4.2 Relation de dispersion :

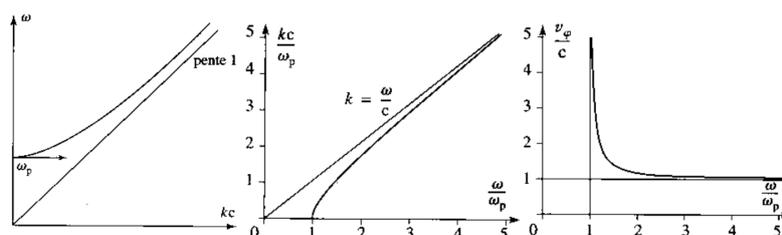


FIGURE 4 – La relation de dispersion dans les plasmas.

Afin d'arriver à la relation de dispersion, on passe par quelques étapes de calcul, en posant \vec{j} la densité de courant électrique dans le plasma. En appliquant Maxwell-Ampère on a

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (46)$$

En notation complexe, on peut simplifier les $\vec{\nabla} \wedge$ et autre Nablaïsteries.

$$\vec{j} = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \implies \vec{j}_0 = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right)$$

L'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nous donne en notation complexe

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Puisque le plasma est localement neutre, l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, traduit l'orthogonalité des vecteurs \vec{k} et \vec{E} . Ainsi le trièdre $[\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}]$ est orthogonal direct. Nous pouvons donc en déduire : $\vec{k} \wedge \vec{B}_0 = \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} \right) = -\frac{k^2}{\omega} \vec{E}_0$ et obtenons :

$$\vec{j}_0 = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E}_0$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un électron de masse m , donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Or

$$\frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \simeq \frac{v B_0}{E_0} \simeq v \frac{k}{\omega} = \frac{v}{v_\phi} \leq \frac{v}{c} \ll 1$$

Nous pouvons donc négliger le terme du au champ magnétique dans l'application du PFD, soit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

Les ions positifs considérés ont une masse largement plus grande que celle des électrons. Nous considérons alors que seuls les électrons sont en mouvement, et que les ions positifs du plasma restent fixes. De ce fait, nous pouvons exprimer la densité de courant \vec{j} :

$$\vec{j} = -ne \vec{v} \implies \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

Calculons alors la dérivée temporelle de la densité de courant.

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{j}_0 \frac{d}{dt} \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) = \vec{j}_0 \underbrace{i(\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega)}_{=0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{soit,} \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = -i\omega \vec{j}$$

Nous obtenons alors : $\vec{j} = i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E}$. Nous obtenons la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

- $\omega > \omega_p$: k réel positif, donc propagation sans atténuation. A très haute fréquence, le milieu est transparent car les variations du champ électrique sont trop rapides pour être ressenties par les électrons
- $\omega < \omega_p$: k imaginaire pur, pas de propagation, l'onde est totalement réfléchiée à l'interface.

OdG : $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ e}^- \text{ m}^{-3}$ d'où $f_p \sim 900 \text{ kHz} - 9 \text{ MHz}$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (47)$$

La fréquence de coupure $\omega_c^2/2\pi$ vaut environ 10^7 Hz pour l'ionosphère par exemple.

4.3 Vitesses

On peut alors établir les expressions des vitesses de groupe et de phase de ce plasma !

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow v_\phi v_g = c^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{v_\phi} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (48)$$

D'où finalement

$$v_\phi = c \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{k c}\right)^2} \quad (49)$$

$$v_g = c \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \quad (50)$$



Visualisation de la dispersion de KG

python3 paquet_d_onda_dispersion.py coupure ☹

Waaaaa.

On voit ici, et dans les équation aussi, que c'est de la dispersion Normale, c'est à dire que le paquet d'onde va moins vite que c . Les petites longueurs d'ondes vont plus vite que les grandes !

Pour communiquer avec les satellites, on utilise donc une fréquence supérieure à f_p (typiquement de l'ordre 1,5 GHz pour le GPS), et une fréquence inférieure pour utiliser les réflexions contre la ionosphère pour communiquer autour de la Terre (2.182 MHz est la fréquence internationale des urgences maritimes).

5 Dispersion des ondes gravito-capillaires

5.1 Ondes gravito-capillaires

☛ Poly de P. Lidon p12 + Guyon, Heulin, Petit

On détaille les calculs, mais à l'oral on peut se contenter de citer les étapes de calcul et les hypothèses.

5.2 Expression du potentiel des vitesses

On considère la propagation à 1 dimension d'ondes à la surface d'un fluide. La hauteur au repos du fluide est notée h et on note $\xi(x, t)$ la variation de hauteur en x à l'instant t . On fait les hypothèses suivantes :

- fluide parfait et incompressible
- fluide irrotationnel au repos et le reste à tout instant t , *i.e.* la perturbation ne crée pas de vorticité.

On peut donc écrire $\vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi$ avec Φ qui vérifie l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$.

- l'onde est de faible amplitude donc le champ de vitesse est un terme d'ordre 1

On cherche une solution sous la forme d'onde propagative $\Phi(x, y, t) = \varphi(u = x_c t)\psi(y)$ à l'équation de Laplace. Ainsi,

$$0 = \delta\Phi = \frac{d^2\varphi}{du^2}\psi + \varphi \frac{d^2\psi}{dy^2} \quad (51)$$

Par séparation des variables, on obtient donc

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{du^2} = -k^2 = \frac{-1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dy^2} \quad (52)$$

Le potentiel des vitesses Φ doit également satisfaire deux conditions limites :

- la composante normale de la vitesse au fond du liquide est nulle

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

- la composante normale de la vitesse à la surface du liquide est égale à la composante normale de la vitesse de l'interface (en supposant la normale de l'interface proche de la verticale, *i.e.* des petits angles)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = v_{\text{interf},y}(h + \xi) = \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

On obtient alors l'expression de Φ :

$$\Phi(x, y, t) = Ae^{ik(x_c t)} \cosh(ky) \quad (53)$$

5.3 Relation de dispersion

On veut maintenant obtenir la relation de dispersion. Pour cela, on utilise deux relations :

- la relation de Bernoulli

On néglige le terme convectif devant la dérivée temporelle dans l'équation d'Euler (\iff longueur d'onde $\gg \xi$). On a alors un fluide parfait, incompressible et irrotationnel donc on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gy = \text{constante} \iff \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (54)$$

- la loi de Laplace

  la surface du liquide, on obtient en faisant attention au signe et on considérant qu'on a un rayon de courbure infini dans le plan yz :

$$P(x, h + \xi, t) - P_0 = -\frac{\gamma}{R} = -\gamma \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^{-1} \quad (55)$$

En combinant ces deux relations, on obtient à la surface du liquide :

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=h+\xi} = 0 \quad (56)$$

On en déduit enfin la relation de dispersion

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh) \quad (57)$$

5.4 Expérience



Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires



⊖ 5 min

Observer la propagation des ondes capillaires avec une cuve à ondes. Un pot vibrant excite un vibreur qui crée des ondes.

Régler le stroboscope pour observer tout le temps le même profil, et mesurer la longueur d'onde directement sur l'écran de projection (attention au facteur de conversion).

Faire quelques points en préparation, le dernier en direct, et tracer $c^2 = \propto 1/\lambda$ ainsi que $c^2 = \frac{g}{k} \left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g} \right)$. Remonter à l_c .

5.5 Vitesse de phase, vitesse de groupe

Dans le **régime d'eau profonde**, *i.e.* dans le cas où h est bien plus grand que toutes les autres longueurs caractéristiques du système, ce qui permet d'avoir $\tanh(kh) \simeq 1$. La relation de dispersion simplifiée permet ainsi d'obtenir la vitesse de phase de l'onde

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho} k} = \sqrt{\frac{g}{k} (1 + l_c^2 k^2)} \quad (58)$$

en faisant apparaître une longueur caractéristique, la **longueur capillaire**, donnée par $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Pour l'eau, elle vaut environ 3 mm. La vitesse de groupe vaut, quant à elle,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g + \frac{3\gamma}{\rho} k^2}{2\sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3}} = \frac{g + 3l_c^2 k^2}{2\sqrt{\frac{g}{k} (1 + l_c^2 k^2)}} \quad (59)$$

La vitesse de groupe décroît quand k augmente, donc les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite que les petites, contrairement à ce qu'on peut avoir avec la relation de dispersion de Klein-Gordon. On peut observer ce phénomène via une simulation ou une vidéo. Dans le cas où la gravité domine la tension de surface, $l_c k \ll 1$ et on voit que $v_\phi = 2v_g$.

En eau peu profonde, on a $\tanh(kh) \approx kh$, on obtient alors $\omega = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) kh$. Dans le cas où $l_c k \ll 1$, on remarque que $v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$. La relation n'est alors plus dispersive.

Remarque

On peut revenir sur l'expression du rayon critique pour que le trombone flotte et qui a la même expression que la longueur capillaire, et donc le même ordre de grandeur, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il s'agit d'une compétition entre gravité et tension de surface.