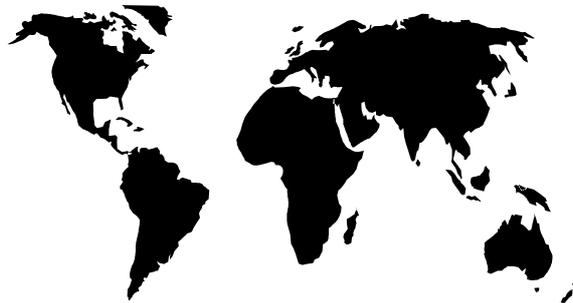


Ondes dans les plasmas

PC*/PC



I – Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma :

1 – Définition d'un plasma :

La matière telle qu'on la connaît sur Terre peut exister essentiellement sous trois formes bien familières : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Il existe cependant un quatrième état de la matière, appelé *plasma*, obtenu lorsque la matière est portée par exemple à très haute température. Paradoxalement, c'est cet état qui est, à l'échelle de l'Univers, le plus courant puisque les astrophysiciens estiment que 99% de la matière est à l'état de plasma dans l'Univers.

Un plasma est un milieu composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés mais qui reste globalement électriquement neutre ; ainsi, un plasma d'hydrogène est composé d'atomes d'hydrogène, de protons (les noyaux d'hydrogène) et d'électrons libres, en proportions différentes selon la nature du plasma (plasma peu ou au contraire complètement ionisé). Les particules chargées (ions et électrons) constituant le plasma interagissent par l'intermédiaire des forces électromagnétiques. L'existence de ces forces à longue portée permet à une particule d'interagir avec beaucoup d'autres, ce qui donne un caractère collectif à ces interactions. Ce caractère collectif a été notamment mis en évidence par des oscillations longitudinales étudiées en 1925 par Irwing Langmuir. Un certain volume d'électrons, déplacé de sa position d'équilibre, laisse un défaut de charge qui devient une charge d'espace positive ; il en résulte une force de rappel due au champ électrique qui tend à ramener les électrons à leur position d'équilibre.

La création d'un plasma nécessite un apport important d'énergie. Celui-ci peut se faire par chauffage, par bombardement avec un faisceau laser très intense ou encore par décharge électrique dans un gaz soumis à une très forte différence de potentiel (dans des dispositifs connus sous le nom de tubes à décharges). On distingue traditionnellement deux sortes de plasmas : les plasmas «froids» dont la température reste inférieure à $\approx 10^5$ K et les «plasmas» chauds pour lesquels la température excède $\approx 10^6$ K.

Les exemples de plasmas dans la nature sont nombreux ; on peut citer :

- ❑ La magnétosphère et l'ionosphère terrestres.
- ❑ Le cœur des étoiles, exemple de plasma chaud et très dense.
- ❑ Les tubes à néon et le phénomène de la foudre (décharges électriques).

Les applications de la physique des plasmas sont très diverses et en plein développement, dans des domaines aussi variés que :

- ❑ La fusion thermonucléaire : en réalisant un plasma de très forte densité et à très haute température, les physiciens espèrent amorcer des réactions de fusion nucléaire et créer ainsi un générateur d'énergie considérable.
- ❑ L'électronique : l'utilisation de plasmas froids permet de réaliser des circuits électroniques intégrés. La télévision de l'avenir possédera certainement un écran à plasma.
- ❑ Traitement des matériaux : les plasmas permettent de détruire, transformer, analyser, souder, créer...la matière. Par exemple, des fibres plastiques peuvent être traitées par plasma pour devenir imperméables.

Si l'apport d'énergie devient considérable, les noyaux des atomes peuvent se séparer en leurs constituants premiers, les nucléons (protons et neutrons) : le plasma obtenu est alors un mélange de nucléons et d'électrons. A plus haute énergie encore (lors par exemple de collisions réalisées à des vitesses pratiquement égales à celle de la lumière entre noyaux atomiques), les nucléons peuvent se désintégrer en leurs constituants ultimes, les quarks et les gluons (particules responsables de la cohésion des quarks au sein des noyaux atomiques). La «soupe» ainsi obtenue

est appelée plasma quarks-gluons. Selon la théorie du «Big bang», un tel plasma quarks-gluons a pu exister durant les premières micro-secondes d'existence de l'Univers.

Dans la suite, on choisit un modèle de plasma constitué de n ions (de masse M et charge $+e$) et de n électrons (de masse m et de charge $-e$) par unité de volume.

On néglige toutes interactions entre les ions : ni attraction ou répulsion électrostatique, ni chocs. Cette hypothèse est satisfaisante pour un plasma peu dense.

On note \vec{V} et \vec{v} les vitesses mésoscopiques d'un ion et d'un électron. Si un champ électrique extérieur \vec{E} est appliqué au plasma :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E} \quad \text{et} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

Par conséquent :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{m}{M} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Soit, à une constante près :

$$\vec{V} = -\frac{m}{M} \vec{v}$$

Par conséquent, comme $m/M \ll 1$, la vitesse des ions positifs est très faible vis-à-vis de celle des électrons. On ne prendra en compte que le mouvement des électrons.

La densité volumique du plasma est :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} + ne\vec{V} = -ne \left(1 + \frac{m}{M} \right) \vec{v} \approx -ne\vec{v}$$

Elle est pratiquement égale à celle des électrons.

2 – Equations de Maxwell dans le plasma :

L'ionosphère est la partie de la haute atmosphère (75 à 250 km d'altitude en plusieurs couches) où les gaz sont ionisés par le rayonnement cosmique et par le vent solaire : c'est un exemple de plasma.

Dans le vide, on peut avoir des ondes de lumière (qui propagent une variation de champ électrique et de champ magnétique, perpendiculaires l'un à l'autre, à la vitesse "c"). Les ondes radio, infra rouge, ultraviolet, X et gamma sont de même nature, mais correspondent à des ordres de grandeur de fréquence et de longueur d'onde très différents. Dans un gaz, on peut propager des ondes de lumière, à une vitesse généralement inférieure à "c". On peut aussi avoir des ondes sonores. Les ondes sonores propagent une variation de pression du gaz (accompagnée d'une variation de densité et de température).

Dans un plasma, beaucoup d'ondes de nature différentes peuvent se propager.

Du fait qu'un plasma combine les effets électromagnétiques aux mouvements des particules (effets fluides ou cinétiques), en général, tout interagit, et la nature des ondes est en général plus compliquée que dans le vide ou dans les gaz neutres.

Les ondes de lumière existent dans les plasmas, mais pour ne pas interagir avec celui-ci, leur fréquence doit être supérieure à l'inverse du temps que mettent les électrons à réagir sous l'influence d'un champ électrique. Cette fréquence correspond précisément à la fréquence de

plasma mentionnée ci-dessus. Pour des ondes de fréquence plus basse, des ondes électromagnétiques se propagent sur des modes différents et variés.

Il existe des ondes qui propagent un champ électrique mais pas de champ magnétique (ondes électrostatiques). Parmi celles-ci, notons les ondes acoustiques, qui sont des ondes sonores, mais qui propagent, en plus d'une variation de pression, une variation de champ électrique. Ces ondes sont très fréquentes dans la magnétosphère et dans le vent solaire.

Certaines ondes propagent une déformation du champ magnétique, mais un champ électrique proportionnellement beaucoup plus faible que pour les ondes de lumière. Ces ondes se propagent plus lentement que les ondes de lumière. Parmi ces ondes, les ondes dites d'Alfven ne sont pas associées à une perturbation de la pression du plasma. Elles ont été prédites par un physicien suédois, Annes Alfven, dans les années 1940, mais peu de gens l'ont cru à ce moment là. Actuellement, les ondes d'Alfven sont observées dans tous les plasmas spatiaux.

Des ondes assez voisines des ondes d'Alfven propagent une perturbation magnétique accompagnée d'une perturbation de pression. Elles sont à la fois magnétiques et sonores. On les appelle les ondes magnéto-sonores.

On s'intéresse à la propagation d'une onde EM plane progressive monochromatique dans un plasma. On note \vec{E} et \vec{B} les champs électrique et magnétique associés à cette onde.

Ces champs agissent sur les électrons du plasma et les mettent en mouvement. L'équation du mouvement d'un électron est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

En admettant que (comme pour une onde dans le vide) $\frac{B}{E} \approx \frac{1}{c}$, on voit que, tant que les ions ne sont pas relativistes :

$$\|e \vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll eE$$

On pourra ainsi négliger la force magnétique vis-à-vis de la force électrique pour étudier le mouvement des électrons :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

Les équations de Maxwell s'écrivent, en notant que la densité volumique de charges est nulle :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{avec} & \quad \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

3 – Relation de dispersion des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques :

On cherche une solution complexe des équations de Maxwell sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

On en déduit alors :

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B} \quad ; \quad -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\vec{j} + i\omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}$$

Avec :

$$i\omega\vec{j} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{j} = -i\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E}$$

Et :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B} \quad ; \quad -\vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E} + \omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}$$

Il vient :

$$-\vec{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E}\right) = \frac{1}{\omega}\vec{k}^2\vec{E} = -\mu_0\frac{ne^2}{m\omega}\vec{E} + \omega\epsilon_0\mu_0\vec{E}$$

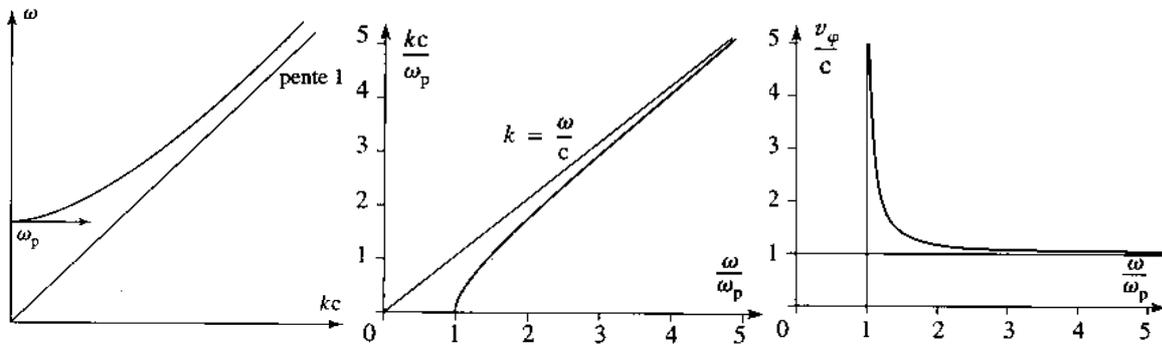
On en déduit la relation de dispersion :

$$k^2 = -\mu_0\frac{ne^2}{m} + \omega^2\epsilon_0\mu_0$$

Soit, avec $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$ et $\omega_p^2 = \frac{\mu_0 c^2 ne^2}{m}$ (pulsation plasma) :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (\text{Equation de Klein-Gordon})$$

k est réel si $\omega > \omega_p$: il y a alors propagation : le plasma agit vis-à-vis des ondes EM comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p .



A haute fréquence, $k \approx \frac{\omega}{c}$ et $v_\phi \approx c$: le comportement du plasma est proche de celui du vide (à cause de l'inertie des électrons).

Si $\omega < \omega_p$, alors k est imaginaire pur :

$$k = \pm i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm ik''$$

Le champ électrique de l'onde s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \vec{k}'' \cdot \vec{x})} \quad \text{soit} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp k'' x} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Seules les ondes planes monochromatiques de pulsations $\omega > \omega_p$ se propagent dans un plasma. Dans le cas contraire, les ondes sont stationnaires et dites évanescentes (évolution exponentielle de l'amplitude selon la direction de l'onde).

4 – Structure de l'onde plane progressive harmonique :

On se place dans le cas où $\omega > \omega_p$ (il y a propagation) :

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

La relation entre k et ω est non linéaire : le milieu est dispersif. La vitesse de phase est :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} c$$

L'indice de réfraction du plasma est défini par :

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{ck}{\omega} \quad \text{soit} \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$$

On remarque que $v_\phi(\omega) > c$ et $n < 1$; ceci n'est pas paradoxal car cette vitesse ne correspond pas à la vitesse de l'information ou de l'énergie (c'est le cas de la vitesse de groupe).

Les équations de Maxwell :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

donnent en notation réelle (k est réel) :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct et $B = \frac{kE}{\omega} = \frac{E}{v_\phi}$: la structure de l'onde plane progressive monochromatique est semblable à celle du vide (seule la vitesse de phase est différente et dépend de la pulsation de l'onde).

Enfin, on justifie *a posteriori* l'approximation $\|e \vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll eE$ puisque :

$$\|e \vec{v} \wedge \vec{B}\| = ev \frac{E}{v_\phi} \ll eE \quad \text{puisque } v_\phi > c$$

II – Propagation d'un groupe d'ondes (paquets d'ondes), vitesse de groupe :

1 – Propagation de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines :

On suppose que le vecteur d'onde est réel (on ne prend pas en compte l'absorption).

Soient $k_1 = k(\omega_1)$ et $k_2 = k(\omega_2)$ les vecteurs d'onde réels des deux ondes. On suppose que ω_1 et ω_2 sont proches et l'on pose :

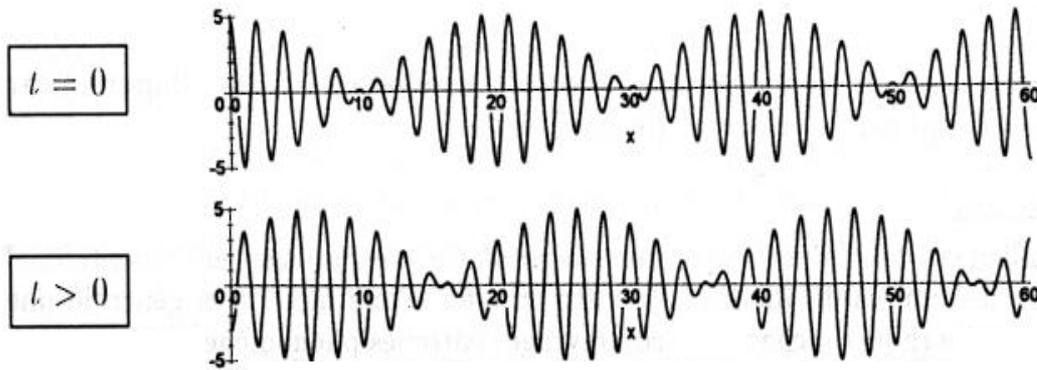
$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad ; \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ; \quad \delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad ; \quad \delta k = k_1 - k_2$$

Avec $|\delta\omega| \ll \omega_0$ et $|\delta k| \ll k_0$.

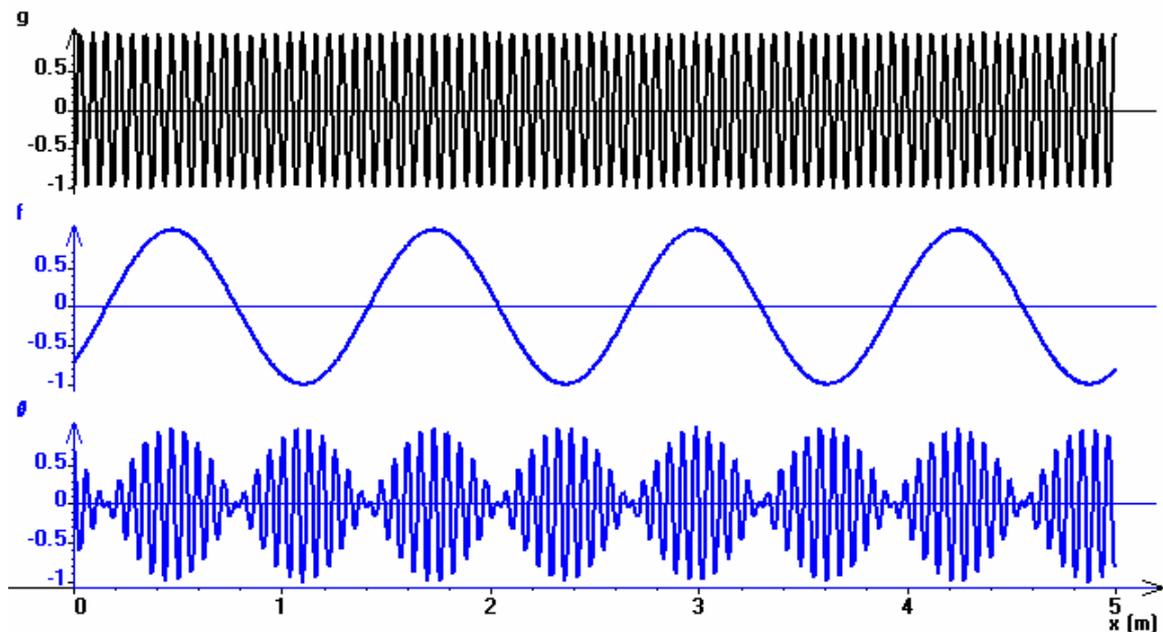
On suppose de plus que les deux ondes ont même amplitude.

L'onde résultante, superposition de deux ondes, a pour amplitude :

$$\theta(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2} t - \frac{\delta k}{2} x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$



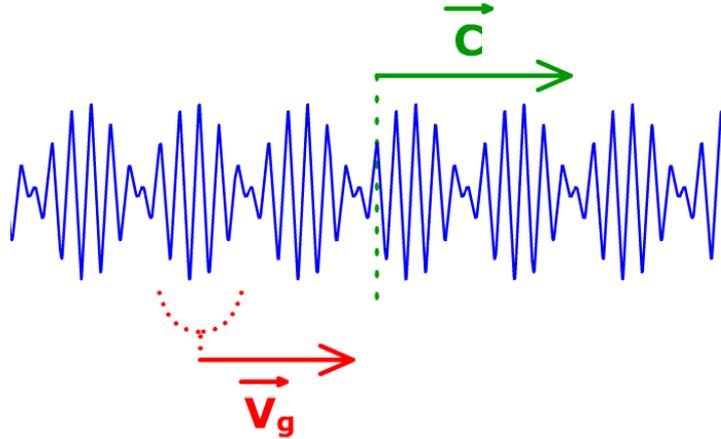
On observe des battements : une onde moyenne de vecteur d'onde k_0 est enveloppée par une onde enveloppe de vecteur d'onde δk . Au cours du temps, l'onde moyenne constitue une onde plane progressive de vitesse $\frac{\omega_0}{k_0}$ alors que l'onde enveloppe constitue une onde plane progressive de vitesse $\frac{\delta\omega}{\delta k}$. Ces vitesses n'étant en général pas identiques, les crêtes de l'onde moyenne avance à une vitesse différente de celle des crêtes de l'onde enveloppe.



[Animation Regressi](#)

2 – Généralisation au cas d'un paquet d'ondes :

On appelle paquet d'ondes un ensemble d'ondes planes progressives harmoniques de pulsations voisines. Plus précisément, leurs pulsations sont comprises dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$, avec $\Delta\omega \ll \omega_0$.



Une illustration de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

L'onde résultante peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de Fourier :

$$\underline{\theta}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp[j(\omega t - kx)] d\omega$$

où l'amplitude $\underline{A}(\omega)$ ne prend de valeurs notables que sur l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$.

En faisant un DVL au 1^{er} ordre :

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

Il vient, en remplaçant $\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$:

$$\underline{\theta}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)] \exp\left[j(\omega - \omega_0)\left(t - x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right] d\omega$$

Soit :

$$\underline{\theta}(x, t) = \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)] \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp\left[j(\omega - \omega_0)\left(t - x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right] d\omega \right\}$$

On pose :

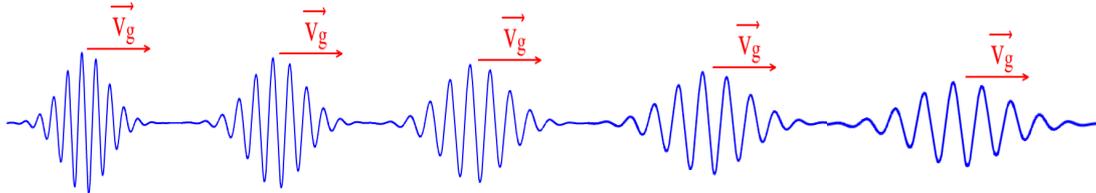
$$\underline{E}\left(t - x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp\left[j(\omega - \omega_0)\left(t - x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right] d\omega$$

Alors :

$$\underline{\theta}(x, t) = \underline{E}\left(t - x\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}\right) \exp[j(\omega_0 t - k_0 x)]$$

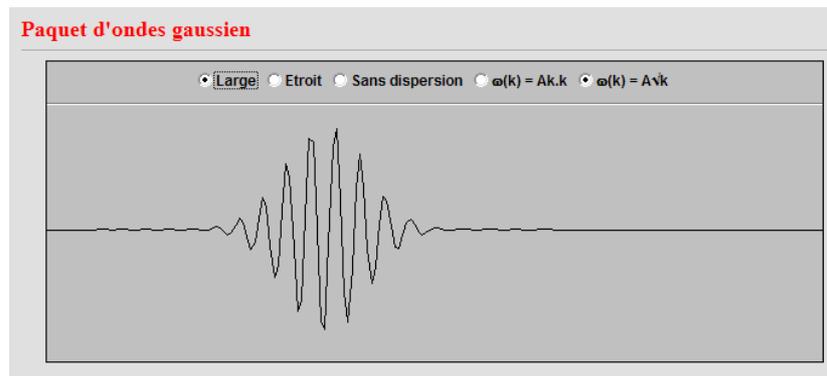
On voit ainsi apparaître une onde moyenne $\exp[j(\omega_0 t - k_0 x)]$ de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ et une onde enveloppe $\underline{E}(t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0})$ qui ne dépend que de la variable $t - x \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} = t - x / \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$ et qui se propage à la vitesse dite de groupe :

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$$



Paquet d'ondes avec déformation

Les vitesses de phase et de groupe sont *a priori* différentes et le paquet d'ondes se propage en se déformant. En effet, chacune des composantes monochromatiques du groupe « chemine » avec sa propre vitesse, de telle sorte qu'on observe une déformation du paquet d'ondes tout au long de sa propagation. On conçoit aussi que cette déformation est accompagnée d'un étalement du paquet d'ondes dû à l'avance croissante prise par les composantes de forte vitesse.



$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} ; \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

[Animation JJ.Rousseau](#)

Conclusions :

Pour une onde réelle, qui est la superposition d'ondes planes progressives monochromatiques se propageant dans un milieu quelconque, il est possible de définir deux vitesses :

- La vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$.

Elle correspond à la vitesse de propagation de la phase d'une composante monochromatique. Elle n'a aucune réalité physique, c'est-à-dire ne correspond pas à un transport d'énergie.

- La vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

C'est la vitesse de propagation de l'enveloppe de l'onde. On montre qu'elle s'identifie généralement à la vitesse de propagation de l'énergie (ou de l'information). Le principe de relativité impose que la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Si v_ϕ dépend effectivement de ω , alors la phase de chaque onde plane progressive sinusoïdale se propage à sa propre vitesse. Une onde physique réelle, composée d'ondes planes progressives sinusoïdales, va se déformer au cours de sa propagation : c'est ce qu'on appelle la dispersion.

3 – Retour à la structure de l'onde plane progressive harmonique :

Vitesse de groupe :

La vitesse de groupe vaut :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega}$$

Or :

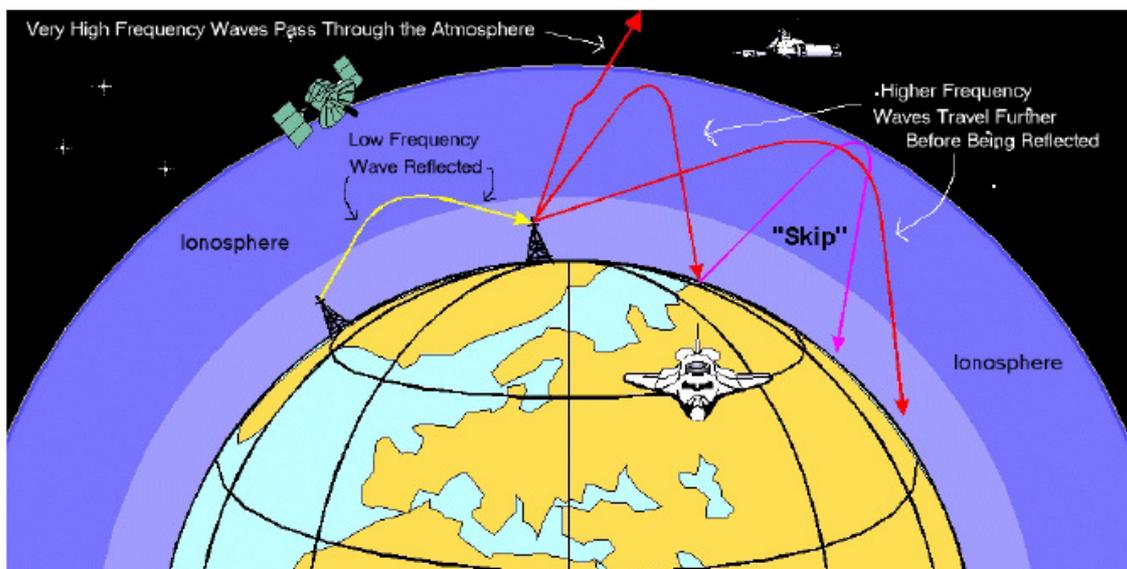
$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

D'où :

$$v_g = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} c = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} c$$

On constate que $v_g < c$ et que $v_\phi v_g = c^2$.

Ionosphère / Atmosphère



[Source: Nasa - GSFC]

Gradient de densité, coupures :

Réflexions / Transmission

Quelques ordres de grandeurs :

L'ionosphère est la partie de la haute atmosphère (75 à 250 km d'altitude en plusieurs couches) où les gaz sont ionisés par le rayonnement cosmique et par le vent solaire. La densité particulière des électrons dans l'ionosphère est de l'ordre de $10^{10} m^{-3}$ à $10^{12} m^{-3}$ et la fréquence plasma de l'ordre de $\nu_p = 10^7 Hz$.

- Pour $\nu = 10^5 Hz < \nu_p$, l'ionosphère joue le rôle de réflecteur : ceci explique la 1^{ère} liaison radio transatlantique réalisée par Marconi en 1901. Ainsi des ondes radio en modulation d'amplitude peuvent atteindre des points très éloignés sur le globe.
- Pour $\nu = 10^8 Hz > \nu_p$, l'ionosphère est « transparente ». Ces fréquences sont utilisées pour communiquer avec les satellites.

Autre exemple : France inter GO et France Info FM

France Inter GO a pour fréquence $f_{GO} = 164 kHz$ et France info FM $f_{FM} = 105,5 MHz$.

On voit que : $f_{GO} < \nu_p < f_{FM}$: ainsi, les GO se réfléchissent sur l'ionosphère et pourront être captées à des distances nettement plus importantes du lieu d'émission que France Info dont les ondes se propagent dans l'ionosphère.

III – Compléments : aspect énergétique :

1 - Coefficients de réflexion et de transmission :

Voir exercice.

