

# LP30 – RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

25 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

## Niveau : L2

## Bibliographie

- ♣ *Cap prépa MP*, **Renvoizé** → Structure générale
- ♣ *Optique expérimentale*, **Sextant** → lait p273, Brewster p270
- ♣ *Optique*, **Houard** → Ciel bleu polarisé p256
- ♣ *Electromagnétisme*, **Perez** → Calcul des champs

## Prérequis

- Dipôle électrostatique
- Electrostatique, magnétostatique, ARQS
- Équations de Maxwell
- Polarisation

## Expériences



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le dipôle rayonnant</b>	<b>2</b>
1.1	Cadre d'étude . . . . .	2
1.2	Calcul des potentiels . . . . .	2
1.3	Calcul des champs électrique et magnétique . . . . .	4
1.4	Vecteur de Poynting et puissance rayonnée . . . . .	6
1.5	Puissance dissipée par le mouvement cyclotron . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Application aux antennes</b>	<b>7</b>
2.1	Antenne rectiligne . . . . .	7
2.2	Une seule antenne en distribution sinusoïdale de courant . . . . .	8
2.3	Antenne sectionnée . . . . .	10
2.4	Cas particulier de l'antenne sectionnée demi-onde . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Diffusion de Rayleigh</b>	<b>11</b>
3.1	Modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	11
3.2	Puissance rayonnée . . . . .	12
3.3	Le ciel est bleu . . . . .	13

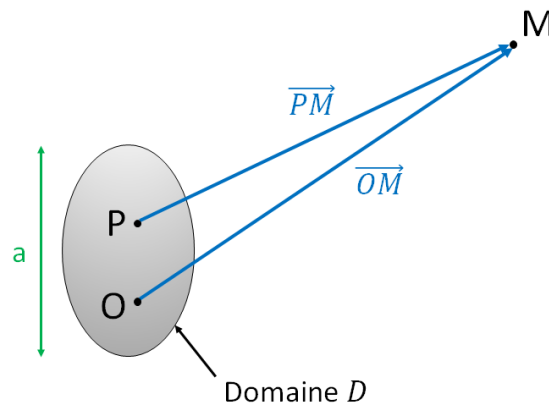
## Introduction

Les ondes électromagnétiques, mise en évidence par Maxwell au cours de la seconde moitié du 19e siècle ont aujourd'hui d'innombrables applications, allant de la télécommunication, à l'imagerie médicale en passant par les microondes et les GPS ou encore bien d'autres... Nous avons déjà parlé de ces types d'onde dans les leçons précédentes, mais nous ne savons toujours pas comment générer physiquement de telles ondes, c'est ce que nous allons essayer de voir dans cette leçon.

## 1 Le dipôle rayonnant

### 1.1 Cadre d'étude

On a déjà abordé dans des leçons précédentes le cas du dipôle en électrostatique, *i.e.* quand les deux charges sont immobiles l'une par rapport à l'autre. On va maintenant s'intéresser à ce qu'il se passe quand on met en mouvement l'une des charges.



On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la particule chargée négativement est immobile dans ce référentiel et que la particule chargée positivement oscille dans une direction  $\vec{e}_z$  avec une vitesse  $\vec{v} = \vec{v}_0 \cos(\omega t)$  avec  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ . En plus du champ électrique créé dans le cadre du dipôle statique, ce mouvement de charges va alors créer un courant  $\vec{i} = q \vec{v}$  qui va engendrer un champ magnétique. Pour étudier ce phénomène, on fait les hypothèses suivantes :

- $a \ll r$  (approximation dipolaire)
- $v \ll c$  et  $T \gg \frac{a}{c}$  (ARQS des sources et charge non relativiste)
- $cT = \lambda \ll r$  (champ lointain)

### 1.2 Calcul des potentiels

On peut exprimer  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'aide d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  et d'un potentiel scalaire  $V$  qui vérifient :

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} & \text{car } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

Cependant, ces potentiels ne sont pas définis de manière unique. Ainsi, prenons  $\phi$  une fonction quelconque et posons

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \\ V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

Alors après calculs on retombe sur les mêmes champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  : c'est ce qu'on appelle l'**invariance de jauge**. On peut limiter le choix de  $\phi$  en choisissant une jauge. Dans cette leçon, on prendra la **jauge de Lorentz** qui impose que

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (3)$$

On peut alors exprimer  $\vec{\nabla} B \wedge \vec{B}$  de deux manières :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \end{cases} \quad (4)$$

En utilisant la jauge de Lorentz, la deuxième expression donne

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V - \Delta \vec{A}$$

On combine avec la première équation pour obtenir

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}} \quad (5)$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (6)$$

Avec la jauge de Lorentz, on obtient donc pour  $V$  une équation similaire à celle obtenue pour  $\vec{A}$  :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (7)$$

Ces deux équations prennent en compte l'état de  $\rho$  et de  $\vec{j}$  avant la propagation. On peut donc en déduire les solutions au point  $M$  en appliquant les formules de **potentiels retardés** :

$$\begin{cases} \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \left( \vec{r}', t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} \right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 \vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\vec{j} \left( \vec{r}', t - \frac{1}{c} \|\overrightarrow{PM}\| \right)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d^3 \vec{r}' \\ V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \left( \vec{r}', t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} \right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 \vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho \left( \vec{r}', t - \frac{1}{c} \|\overrightarrow{PM}\| \right)}{\|\overrightarrow{PM}\|} d^3 \vec{r}' \end{cases} \quad (8)$$

Dans ces solutions,  $\frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}$  correspond à la durée de propagation. On peut appliquer l'approximation dipolaire pour remplacer  $\frac{1}{\|\overrightarrow{PM}\|}$  par  $\frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}$  et l'ARQS des sources pour écrire remplacer terme de retard  $\frac{\|\overrightarrow{PM}\|}{c}$  par  $\frac{\|\overrightarrow{OM}\|}{c}$ . On obtient donc

$$\begin{cases} \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\vec{j} \left( \vec{r}', t - \frac{1}{c} \|\overrightarrow{OM}\| \right)}{\|\overrightarrow{OM}\|} d^3 \vec{r}' \\ V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho \left( \vec{r}', t - \frac{1}{c} \|\overrightarrow{OM}\| \right)}{\|\overrightarrow{OM}\|} d^3 \vec{r}' \end{cases} \quad (9)$$

Pour calculer  $\vec{A}$ , on se place dans le cas d'un courant ponctuel :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \left( t - \frac{1}{c} \|\vec{OM}\| \right)}{\|\vec{OM}\|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]}{r} \vec{e}_z \quad (10)$$

On peut donc exprimer  $\vec{A}$  en fonction du moment dipolaire  $\vec{p} = q \vec{r}$  :

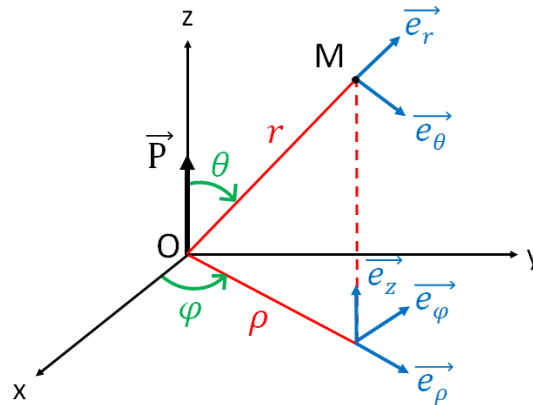
$$\boxed{\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}(t')}{dt'}} \quad \text{avec } t' = t - \frac{r}{c} \quad (11)$$

### Plusieurs charges

Si il y a plusieurs charges, on peut généraliser l'expression de  $\vec{A}$  en écrivant

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}(t')}{dt'} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt'} \left[ \sum_i q_i \vec{r}_i(t') \right]$$

## 1.3 Calcul des champs électrique et magnétique



On accède en premier au champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle oscillant dans la direction  $\vec{e}_z$ . Pour cela, on applique la définition de  $\vec{A}$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{OM}, t) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{1}{r} \frac{dp}{dt'} \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \frac{dp}{dt'} \right) \wedge \vec{e}_z \quad \text{en utilisant } \vec{\nabla} \wedge [f(\vec{r}) \vec{u}] = \vec{\nabla} f \wedge \vec{u} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{1}{r} \vec{\nabla} \frac{dp}{dt'} - \frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt'} \right) \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{1}{r} \frac{1}{c} \frac{d^2 p}{dt'^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt'} \right) (-\sin \theta \vec{e}_\varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\vec{e}_\varphi$  est un vecteur de la base  $\{\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\rho\}$  des coordonnées sphériques.

### Remarque

Pour calculer  $\vec{\nabla} \frac{dp}{dt'}$ , il ne faut pas oublier que  $t' = t - \frac{r}{c}$  et donc que  $\frac{d}{dr} \iff -\frac{1}{c} \frac{d}{dt'}$ .

On trouve donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left( \frac{1}{c} \frac{d^2 p}{dt'^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dt'} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (13)$$

Le champ  $\vec{E}$  peut être alors calculé à partir de cette expression via Maxwell-Ampère en prenant  $\vec{j} = \vec{0}$  pour obtenir :

$$\vec{E} = \left[ \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c r^2} \frac{dp}{dt'} \right] [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\varphi] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{d^2 p}{dt'^2} \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (14)$$

On reconnaît dans cette expression le champ du dipôle électrostatique en  $\frac{1}{r^3}$ . Si on suppose que le dipôle oscille sinusoidalement avec la pulsation  $\omega$ , on a

$$\frac{dp}{dt'} \approx \omega p \approx \frac{c}{\lambda} p \quad \text{et} \quad \frac{d^2 p}{dt'^2} \approx \left( \frac{c}{\lambda} \right)^2 p$$

On peut alors distinguer deux régimes de rayonnement :

- **le régime de champ proche**  $r \ll \lambda$  :

On retrouve dans ce régime l'expression du champ électrostatique avec le retard dû à la propagation mais sans effets d'induction. On est alors dans un régime quasi-électrostatique :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\varphi] \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{dp}{dt'} \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (15)$$

- **le champ de rayonnement lointain**  $r \gg \lambda$  :

Les termes en  $\frac{1}{r^3}$  et en  $\frac{1}{r^2}$  sont négligeables, donc

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{d^2 p}{dt'^2} \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{d^2 p}{dt'^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (16)$$

Le champ de rayonnement lointain possède plusieurs propriétés remarquables :

- une onde n'est émise que si les charges sont accélérées (*i.e.*  $\frac{d^2 p}{dt'^2} \neq 0$ )
- rayonnement anisotrope à cause de  $\sin \theta$  et polarisé
- structure locale d'onde plane (champs localement  $\perp$ )
- décroissance lente de l'amplitude en  $\frac{1}{r}$
- le champ créé à grande distance se propage à la vitesse  $c$  suivant  $\vec{e}_r$  (dépendance en  $t'$ )

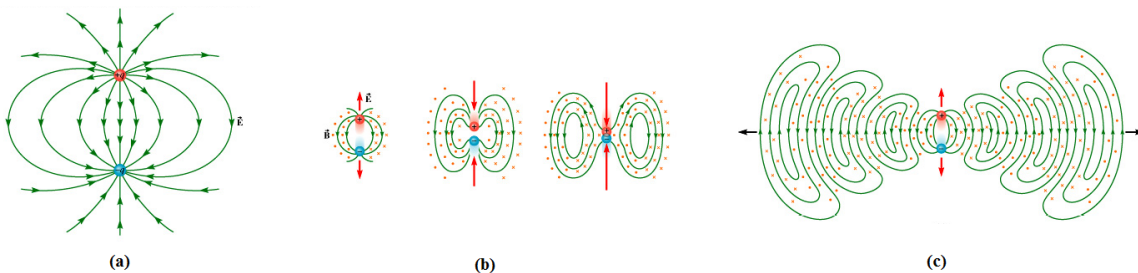


FIGURE 1 – (a) Rayonnement du dipôle électrostatique. (b) Rayonnements de 3 dipôles électrostatiques de dimension différente. (c) Rayonnement du dipôle électrique oscillant.

## 1.4 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting se calcule via la formule

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

En champ de rayonnement lointain, cette expression donne

$$\vec{P}_i = \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 r^2 c^3} \left( \frac{d^2 p}{dt'^2} \right)^2 \vec{e}_r \quad (17)$$

On voit donc que

- $\vec{\Pi} \parallel \vec{e}_r$
- l'énergie est rayonnée de façon anisotrope : elle n'est pas rayonnée dans l'axe du dipôle
- la puissance rayonnée à travers une sphère de centre 0 est constante (**formule de Larmor**) :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \left\langle \left( \frac{d^2 p}{dt'^2} \right)^2 \right\rangle$$

## 1.5 Puissance dissipée par le mouvement cyclotron

Prenons l'exemple du mouvement cyclotron. Un électron (par exemple), de vitesse initiale  $\vec{v}_0$ , est soumis à une champ  $\vec{B}_0 \perp \vec{v}_0$ . En l'absence de dissipation, l'électron a un mouvement circulaire de pulsation  $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ . On veut s'intéresser à l'énergie que l'électron perd par rayonnement et voir à quel point cette perte d'énergie atténue la rotation de l'électron.

L'électron a une accélération centripète  $a = \omega_c v_0 = \frac{eB_0}{m_e} v_0$ . Il n'est soumis qu'à la force de Lorentz en  $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$  qui ne travaille pas : le mouvement est donc conservatif et  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_e v_0^2$ .

On peut également adapter la formule de Larmor au cas d'une charge isolée accélérée :

$$\left\langle \left( \frac{d^2 p}{dt'^2} \right)^2 \right\rangle = \langle e^2 a^2(t) \rangle = \frac{1}{2} (ea)^2 \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{(ea)^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3} = \frac{e^4 B_0^2 v_0^2}{12\pi \varepsilon_0 m_e^2 c^3}$$

On obtient donc un temps typique d'amortissement

$$\tau = \frac{E}{\mathcal{P}_{\text{ray}}} = \frac{6\pi \varepsilon_0 m_e^3 c^3}{e^4 B_0^2} \simeq 52\,000 \text{ s}$$

Avec un champ  $B_0 = 1 \times 10^{-2} \text{ T}$ , la particule a le temps de faire  $1.4 \times 10^{13}$  tours. On peut donc admettre que dans ce cas la puissance dissipée par le rayonnement a une influence marginale sur le mouvement de la particule.

Plus généralement, les effets de rayonnement sont toujours négligeables devant les effets mécaniques.

## 2 Application aux antennes

### 2.1 Antenne rectiligne

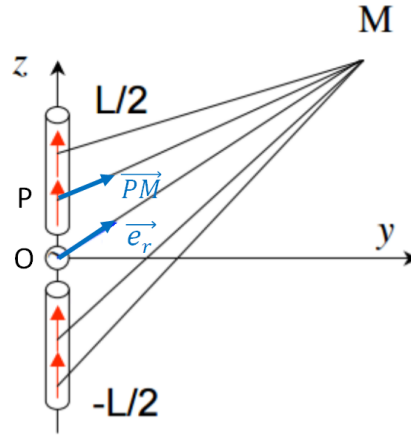


FIGURE 2 – Schéma d'une antenne rectiligne.

Une antenne est un conducteur cylindrique suffisamment fin pour le considérer unidimensionnel. On peut alors écrire, avec  $\ell$  la longueur de l'antenne :

$$\vec{j} = \frac{1}{\ell S} \sum_i q_i \vec{v}_i \quad (18)$$

On en déduit le lien entre  $I$  et le moment dipolaire  $\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM}_i$  :

$$\vec{I} = \int_S \vec{j} dS = \frac{1}{\ell} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (19)$$

Ce qui nous intéresse bien sûr ce sont les variations de cette intensité :

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{1}{\ell} \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} \quad (20)$$

Pour bien vérifier les hypothèses du dipôle, il faut avoir  $v \ll c$ , donc  $I$  qui varie assez lentement, il faut se placer en champs lointain pour avoir l'approximation dipolaire, et on veut  $\ell \ll \lambda$  pour avoir l'ARQS. Cependant beaucoup d'antennes sont dites quart d'onde, ou demi onde, ce qui signifie que leur longueur est un demi ou un quart de la longueur d'onde à laquelle elles émettent.

Pour palier à ce problème, il va falloir considérer des morceaux infinitésimaux d'antenne. L'élément élémentaire de champ électrique créé par un morceau d'antenne de longueur  $dz$  est  $d\vec{E}$ , avec  $\tau(z)$  le temps de propagation, qui dépend de  $z$ , et  $r'(z)$  la distance entre la source, ici le bout d'antenne en  $z$ , et le récepteur, situé en  $\vec{r}'$  :

$$d\vec{E} = \frac{dz \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r'(z)c^2} \frac{dI}{dt}(z, t - \tau(z)) \vec{e}_\theta \quad (21)$$

On peut alors intégrer et trouver le champs global :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{z=-\ell/2}^{z=+\ell/2} \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r'(z)c^2} \frac{dI}{dt}(z, t - \tau(z)) \vec{e}_\theta dz \quad (22)$$

Il faut maintenant y mettre une distribution de courant d'une forme adaptée, et calculer  $\tau$  et  $r'$ .

## 2.2 Une seule antenne en distribution sinusoïdale de courant

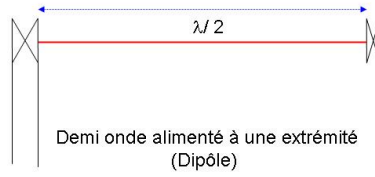


FIGURE 3 – Schéma de l'antenne que l'on utilise.

On définit le courant  $I(z)$  que l'on impose dans l'antenne, et le plus simple est encore de choisir une onde stationnaire. Les conditions aux limites sont alors celles d'une corde de Melde, les courants aux extrémités sont nuls. Les conditions aux limites imposent que  $\ell = \frac{n\lambda}{2}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui quantifie les valeurs possibles de  $k$ .

$$I = I_0 e^{i\omega t} \cos(k_n z) \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (23)$$

On notera par la suite  $k$  en se souvenant que c'est un objet qui est quantifié, ce qui nous aidera bien un peu plus tard.

Lorsque l'on intègre, il faut prendre en compte la propagation, qui se fait à la vitesse  $c$ .

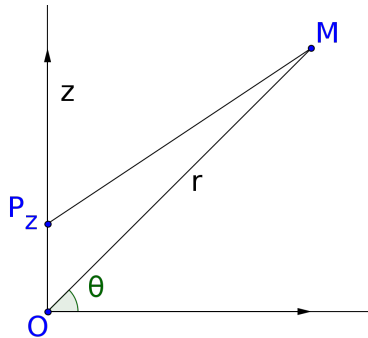


FIGURE 4 – Schéma pour le calcul du temps de propagation.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - z\vec{e}_z \\ \|\overrightarrow{PM}\|^2 &= r^2 + z^2 - 2zr \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \cdot \vec{e}_z \\ &= r^2 + z^2 - 2zr \sin \theta \\ PM &\simeq r - z \sin \theta \end{aligned} \quad (24)$$

Pour la propagation on fait un ordre 0 en  $\frac{z}{r}$  dans l'amplitude, et un ordre 1 pour la phase, qui est plus sensible du fait de sa  $2\pi$ -périodicité.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_0 i\omega e^{i\omega(t - \frac{r}{c} + \frac{z}{c} \sin \theta)} \cos(kz) dz \quad (25)$$

En posant un magnifique  $\vec{E}_0 = i \frac{I_0 \omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \vec{e}_\theta$ , on peut écrire



$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{i\omega \frac{z}{c} \sin \theta} \cos(kz) dz \quad (26)$$

Et c'est là qu'on fait de la magie Vaudou sur l'intégrale. On prend l'exponentielle complexe et on en fait une somme, comme en terminale :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left( \cos\left(\omega \frac{z}{c} \sin \theta\right) + i \sin\left(\omega \frac{z}{c} \sin \theta\right) \right) \cos(kz) dz \quad (27)$$

Or en faisant ça, on fait apparaître une intégrale paire, car le produit de deux fonctions paires est pair, et une intégrale impaire, car impair  $\times$  paire = impair ! On pose  $k'(\theta) = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ , et on fait ENCORE PLUS de magie Vaudou :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= 2\vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \int_0^{\ell/2} \cos\left(\omega \frac{z}{c} \sin \theta\right) \cos(kz) dz \\ &= \vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \int_0^{\ell/2} [\cos((k' - k)z) + \cos((k' + k)z)] dz \\ &= \vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \left[ \frac{1}{k' - k} \sin\left((k' - k)\frac{\ell}{2}\right) + \frac{1}{k' + k} \sin\left((k' + k)\frac{\ell}{2}\right) \right] \\ &= \vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2 - k^2)} \left\{ k' \left[ \sin\left((k' - k)\frac{\ell}{2}\right) - \sin\left((k' + k)\frac{\ell}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - k \left[ \sin\left((k' - k)\frac{\ell}{2}\right) + \sin\left((k' + k)\frac{\ell}{2}\right) \right] \right\} \\ &= 2\vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2 - k^2)} \left( k' \sin\left(\frac{-k\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{k'\ell}{2}\right) - k \sin\left(\frac{k'\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{-k\ell}{2}\right) \right) \\ &= -2\vec{E}_0 \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2 - k^2)} \left( k' \sin\left(\frac{k\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{k'\ell}{2}\right) + k \sin\left(\frac{k'\ell}{2}\right) \cos\left(\frac{k\ell}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Or par une chance, on a pris  $k = k_n$  tel qu'aux extrémités de l'antenne, on a  $\cos k_n z$  qui s'annule bien gentiment en  $\frac{\ell}{2}$ , et  $\sin k_n \ell/2 = (-1)^n$ . On se rappelle également que  $k' = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ .

**Champs électrique produit par une antenne en régime sinusoïdal :**

$$\vec{E}(\vec{r}) = -i \frac{I_0 \omega}{2\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r((k')^2 - k_n^2)} k' (-1)^n \cos\left(k' \frac{\ell}{2}\right) \vec{e}_\theta \quad (29)$$

Avec  $k' = \frac{\omega}{c} \sin \theta$  et  $k_n = \frac{n\pi}{\ell}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### ♣ Ferrand, Electromagnétisme

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \frac{I_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} e^{i\omega(t-\frac{r}{c})} \mathcal{F}(\theta) \vec{e}_\theta \quad (30)$$

Avec  $\mathcal{F}(\theta) = \int_{\text{antenne}} dz \sin \theta f(z) e^{i \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \theta}$  la transformée de Fourier de la répartition de courant  $f(z)$ .

Bon, on va pas se mentir, c'est indigeste, mais on a une façon "simple" d'exprimer le bousin. On va l'appliquer maintenant à un cas plus réel, celui de l'antenne sectionnée.

### 2.3 Antenne sectionnée

L'astuce de l'antenne sectionnée, c'est de séparer l'antenne en deux, et de mettre une fonction symétrique entre les deux côtés, comme décrit dans la figure suivante.

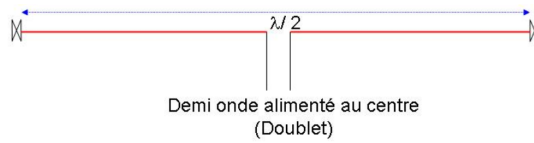


FIGURE 5 – Schéma de l'antenne demi-onde en mode doublet.

On peut alors écrire l'expression du courant comme

$$I(z, t) = I_0 e^{i\omega(t-\tau(\theta))} \sin \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( |z| - \frac{\ell}{2} \right) \right] \quad \text{avec } \ell = \frac{n\pi}{\lambda}, n \in \mathbb{N} \quad (31)$$

Notez la valeur absolue, qui diffère du calcul précédent, et va permettre de s'en sortir. On trouve :

$$\begin{cases} \vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - r/c)} \vec{e}_\theta & \text{si } n \text{ est impair} \\ \vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{(-1)^{n/2} - \cos\left(\frac{n\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - r/c)} \vec{e}_\theta & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad (32)$$

Attention cependant, ces résultats semblent supposer qu'il existe un lien entre le  $k = \frac{\omega}{c}$  propagatif de l'onde et  $k_n$ , ce qui me semble faux. C'est à vérifier, mais soyons honnêtes, on ne vérifiera jamais et on ne présentera jamais l'intégralité des calculs, qui seront cachés dans un "après quelques manipulations triviales" (ou "on obtient aisément").

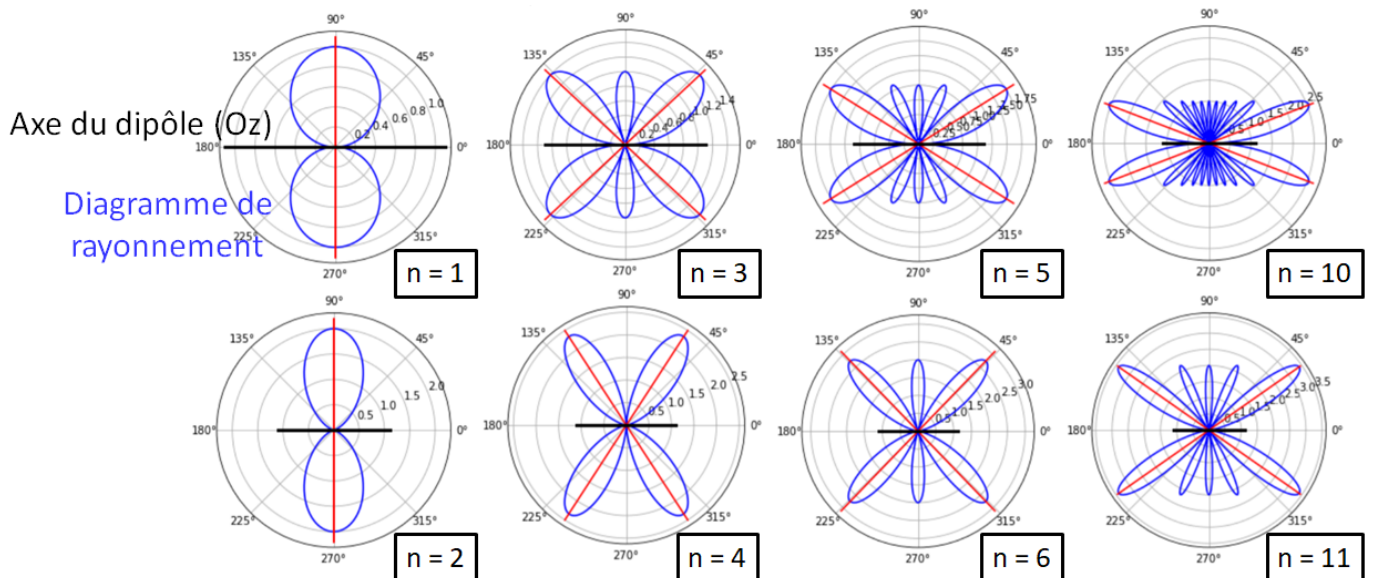


FIGURE 6 – Diagrammes de rayonnement de l'antenne demi-onde sectionnée.

## 2.4 Cas particulier de l'antenne sectionnée demi-onde

Une antenne demi-onde, on la règle à  $n = 1$ . Cela revient à avoir une demi-longueur d'onde émise dans l'antenne. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} \vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - r/c)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - r/c)} \vec{e}_\phi \end{cases} \quad (33)$$

Le calcul donne alors un vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 cr^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \sin^2(\omega t - r/c) \vec{e}_z \quad (34)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 cr^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \vec{e}_z \quad (35)$$

Et finalement on a

$$\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = \int \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = 35.54 I_0^2 \quad (36)$$

On peut aussi calculer la résistance de rayonnement, définie comme  $\langle \mathcal{P}_{ray} \rangle = R_{ray} I_{eff}^2 = R_{ray} \frac{I_0^2}{2}$ . On trouve alors  $R_{ray} = 73 \Omega$ .

## 3 Diffusion de Rayleigh

La diffusion de Rayleigh est un modèle expliquant la diffusion de la lumière à travers des atomes en suspension dans un milieu transparent. C'est notamment le phénomène qui explique la couleur du ciel ainsi que la polarisation apparente de la lumière du ciel alors que la lumière du Soleil n'est pas polarisée. Le lien avec les dipôles ? Les molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles et donc réémettent, comme des dipôles, de la lumière de façon anisotrope (donc partiellement polarisée).



### Diffusion de Rayleigh

↗ Sextant p273

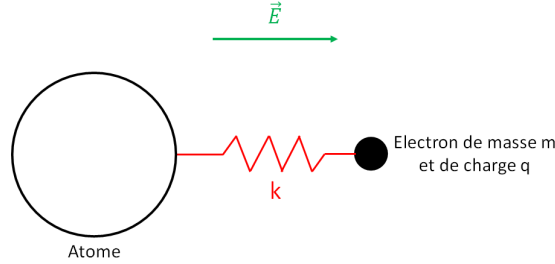
⊖ 5 min

On éclaire une cuve avec du lait, et patati et patata, tout est bien détaillé dans le Sextant... Au pire si ça marche pas, on peut regarder <https://youtu.be/rA0vLouZ0gg>.

### 3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Afin de connaître le moment dipolaire d'un atome soumis à un champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$ , on utilise le modèle phénoménologique de l'électron élastiquement lié. Pour cela, on suppose que le noyau est fixe (car il est 1000 fois plus massif que l'électron), et on suppose que l'électron subit les forces suivantes :

- la force de Lorentz  $\vec{F}_L = -e\vec{E}_{\text{ext}}(t)$ , en supposant que  $\vec{E}_{\text{ext}}(t)$  est uniforme sur les dimensions  $d$  du dipôle, *i.e.* à l'échelle de l'atome (approximation des grandes longueurs :  $\lambda \gg d$ )
- une force de rappel élastique  $\vec{F}_{\text{rappel}} = -m\omega_0^2\vec{r}$  qui est valable si le système ne s'éloigne pas trop de sa position d'équilibre. Il s'agit d'une modélisation **empirique** de l'interaction Coulombienne donc la forme est adaptée à l'étude de la résonance optique ( $\nu_0 = 10^{14}$ - $10^{15}$  Hz, dans le domaine du visible).
- une force de frottement fluide modélisée par  $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}}$ . Elle représente la perte d'énergie par rayonnement de l'électron accéléré



En notant  $\vec{r}$  la position de l'électron par rapport au barycentre immobile des charges positives (la noyau), on peut appliquer le PFD et obtenir :

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}_{\text{ext}}(t) - \frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} \quad (37)$$

En prenant comme solution une OPPH de la forme  $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$  et  $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  et en passant dans le domaine de Fourier, on obtient

$$\vec{r} = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_{\text{ext}} \quad (38)$$

Le moment dipolaire  $\vec{p}$  vaut alors  $\vec{p} = -e\vec{r}$ , c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_{\text{ext}}} \quad (39)$$

### Polarisation

Le moment dipolaire  $\vec{p}$  peut être relié à la polarisation  $\vec{P}$  du milieu dans l'hypothèse des milieux dilués par  $\vec{P} = n^* \vec{p}$  où  $n^*$  est la densité électronique du milieu. On a donc :

$$\vec{P} = n^* \vec{p} = -n^* e \vec{r} = \frac{n^* e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_{\text{ext}}$$

## 3.2 Puissance rayonnée

Pour comprendre la diffusion de Rayleigh, on se place dans le régime de Rayleigh (thank you Captain Obvious), *i.e.* pour des pulsations  $\omega \ll \omega_0 = 10^{16}$  rad/s. Cela revient à ne considérer que des longueurs d'ondes supérieures à l'ultraviolet. Dans ce cadre, le moment dipolaire de l'atome **pour un électron** vaut

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0^2\tau} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \vec{E}_{\text{ext}} \\ &\simeq \frac{e^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Pour un atome avec  $Z$  électrons, on a donc un moment dipolaire  $\vec{p} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{\text{ext}}$ . Pour un champ extérieur issu d'un OPPH de pulsation  $\omega$ , on peut écrire

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = -\omega^2 \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{\text{ext}} = -\frac{(Ze)^2}{m} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \vec{E}_{\text{ext}}$$

La formule de Larmor nous donne donc la puissance rayonnée par l'atome :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\langle \left( \frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2 \right\rangle$$

donc

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{(Ze)^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left\langle \vec{E}_{\text{ext}}^2 \right\rangle \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \propto \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

### 3.3 Le ciel est bleu

On a maintenant tous les outils pour expliquer ce qu'on voit :

- **le ciel est bleu** : la puissance rayonnée (donc diffusée) est en  $\omega^4$  donc les faibles longueurs d'onde (le violet et le bleu) sont plus diffusées que les grandes longueurs d'onde (le rouge). Dans l'expérience de la cuve avec les particules de lait en suspension dans l'eau, on voit au début de la cuve de la lumière bleue.

Cela explique aussi pourquoi on voit le Soleil jaune alors qu'il est blanc : le bleu étant diffusé, il ne reste que la couleur complémentaire de bleu qui nous parvient, donc le jaune.

- **le ciel devient orangé au coucher du Soleil** : plus l'épaisseur du milieu traversé est grande, plus la lumière perd ses hautes fréquences (donc son bleu). Lors d'un coucher de Soleil, l'incidence de la lumière est rasante donc elle traverse une plus grande distance dans l'atmosphère avant de nous parvenir, donc elle n'a quasiment plus de bleu. Dans la cuve, on voit donc que la lumière tend de plus en plus vers le rouge.
- **la lumière est partiellement polarisée** : on a vu au cours de la leçon que le champ rayonné était anisotrope donc partiellement polarisé. La puissance rayonnée est maximale en  $\theta = \pi/2$ , angle pour lequel  $\vec{E} \parallel \vec{p}$ . Un dipôle excité selon une direction donnera donc un champ partiellement polarisé dans cette même direction.

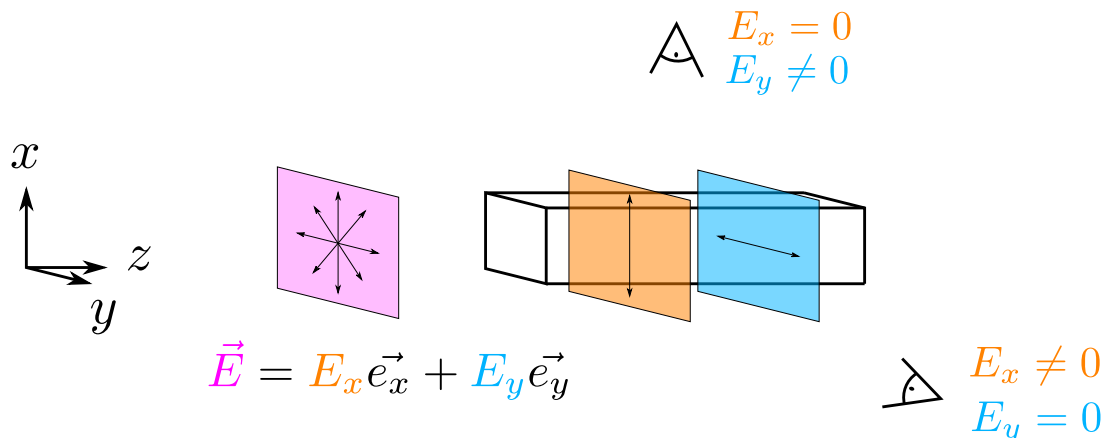


FIGURE 7 – Polarisation du champ rayonné dans la cuve.

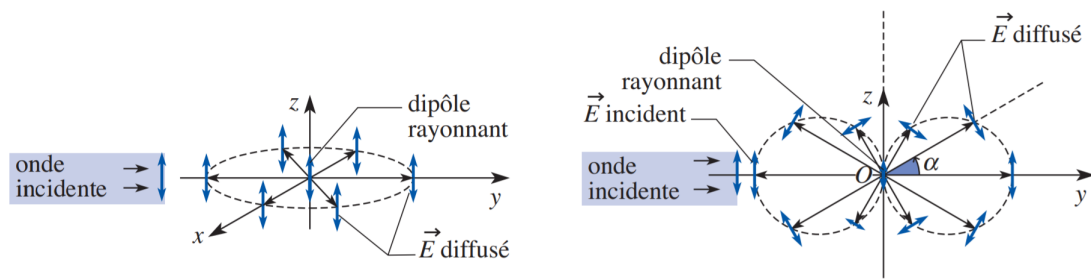


FIGURE 8 – Polarisation du champ rayonné.

On peut également constater ce phénomène en comparant une photo du ciel avec et sans analyseur.

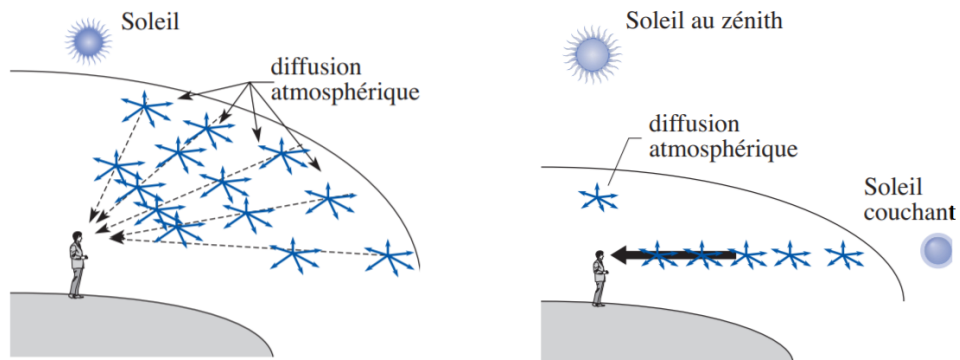


FIGURE 9 – Polarisation de la lumière du ciel.

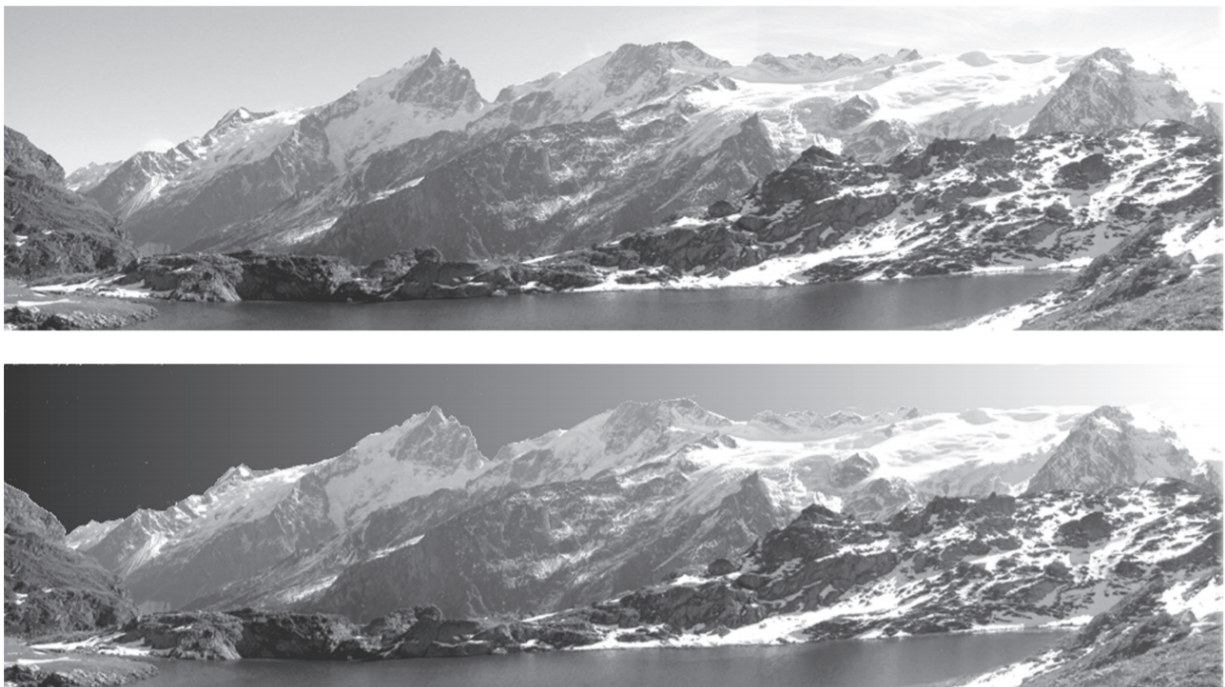


FIGURE 10 – Photo prise sans (en haut) et avec (en bas) analyseur.