

## TD1: Théorème de Van Cittert - Zernike Applications à l'interférométrie stellaire

Le but de ce TD est de vous familiariser avec le formalisme de **cohérence spatiale** vu en cours. Un exemple d'application est choisi en astronomie : la mesure du diamètre des étoiles lointaines.

### A Degré de cohérence spatiale - Rappels

#### A.1 Position du problème : Dispositif de trous d'Young

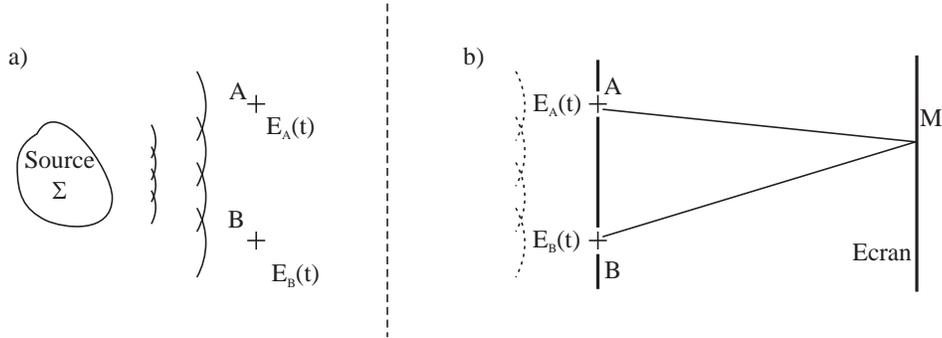


Figure 1: (a) Champs créés par une source quelconque. (b) Dispositif de mesure de la cohérence à l'aide de trous d'Young.

Considérons les champs électromagnétiques complexes en deux points de l'espace A et B,  $E_A(t)$  et  $E_B(t)$ , résultant de la somme des champs émis par un ensemble de sources quasi-monochromatiques (Fig.1(a)). Suivant les sources utilisées, ces champs peuvent présenter des fluctuations relatives plus ou moins importantes. C'est pourquoi leurs propriétés sont décrites à partir des valeurs moyennées sur le temps d'observation:  $\langle |E_{A,B}(t)|^2 \rangle = I_{A,B}$  correspondant aux intensités respectives et le terme croisé  $\langle E_A(t)E_B^*(t) \rangle = \langle E_A E_B^* \rangle$ .

Notez bien que nous nous limiterons ici à l'étude des processus stationnaires, c'est à dire pour lesquels les moyennes ne dépendent pas du temps.

Afin de quantifier ces fluctuations, on s'intéresse à la possibilité de produire des interférences à partir des champs  $E_A$  et  $E_B$ . Pour cela, on utilise un dispositif de trous d'Young, les trous correspondant aux points A et B (Fig. 1(b)). Ces points se comportent alors comme des sources secondaires et l'on étudie la répartition de l'éclairement sur un écran.

1. De manière générale (sans connaissance *a priori* sur la source), rappeler que l'on peut écrire l'état d'interférence au point M sous la forme:

$$I_M = 2I_0(1 + C \cdot \cos(2\pi p_M + \alpha)) \quad \text{avec} \quad C = \frac{2|\langle E_A E_B^* \rangle|}{I_A + I_B} \quad (1)$$

où l'on a posé  $\langle E_A E_B^* \rangle = |\langle E_A E_B^* \rangle| e^{i\alpha}$ ,  $I_0 = (I_A + I_B)/2$  et  $p_M = (AM-BM)/\lambda$ , l'ordre d'interférence au point M.

2. Comment mesure-t-on le paramètre  $C$  expérimentalement ?

## A.2 Cas des sources cohérentes

Pour une source cohérente, les champs  $E_A(t)$  et  $E_B(t)$ , bien que pouvant comporter des fluctuations intrinsèques, sont parfaitement corrélés (synchrones). On pose alors  $E_A(t) = E_A e^{i\phi_A} f(t)$  et  $E_B(t) = E_B e^{i\phi_B} f(t)$ , où  $f(t)$  est une fonction normalisée ( $\langle |f(t)|^2 \rangle = 1$ ) qui tient compte des variations temporelles.

1. Que vaut dans ce cas le contraste  $C \equiv C_{\text{coh}}$ ? Donner l'expression de  $C_{\text{coh}}$  en fonction du rapport  $\alpha = I_A/I_B$ ? Donner l'expression complète de  $I_M$  avec  $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$ .
2. Pour le cas particulier d'une source ponctuelle située au point S, exprimer l'intensité au point M en introduisant l'ordre d'interférence côté source  $p_S = (SA-SB)/\lambda$ .

## A.3 Propriétés du degré de cohérence spatiale

Pour une source quelconque, on rappelle que l'on définit le *degré de cohérence spatiale* comme le facteur de réduction du contraste:

$$\gamma_{AB} = \frac{C}{C_{\text{coh}}} = \frac{|\langle E_A E_B^* \rangle|}{\sqrt{I_A I_B}}$$

1. Quelle propriété permet de montrer que  $\gamma_{AB}$  est compris entre 0 et 1?
2. Que vaut  $\gamma_{AB}$  pour deux points cohérents? incohérents (champs décorrélés)? Dans ce dernier cas, comment s'écrit  $I_M$ ?
3. Pourquoi peut-on réinterpréter le dispositif de trous d'Young comme un "cohérence-mètre"?

## B Théorème de Van Cittert - Zernike

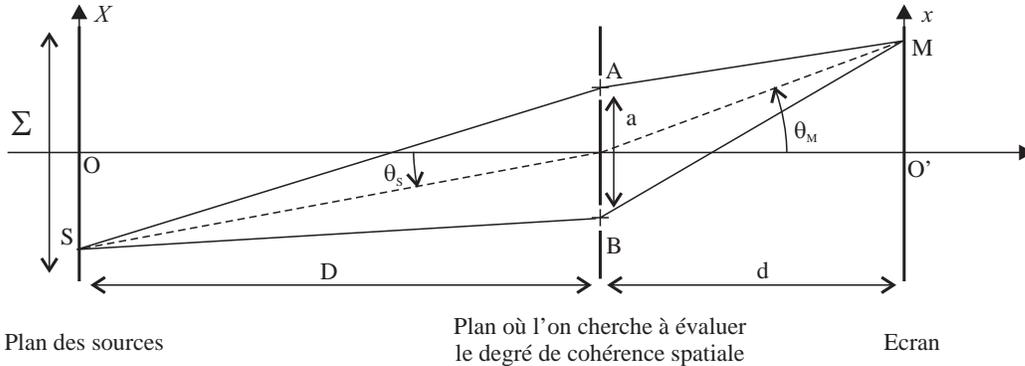


Figure 2: *Dispositif de mesure de la cohérence à l'aide de trous d'Young, suivant la méthode proposée dans la partie A.*

On s'intéresse maintenant à un ensemble de sources  $\Sigma$ , quasi-monochromatiques et incohérentes, situées dans un plan (on ne considèrera ici que la dimension suivant  $X$ ). Pour calculer le degré de cohérence spatiale dans un plan situé à une distance  $D$ , grande devant les dimensions de la source ( $D \gg \Sigma \gg \lambda$ ), on utilise un dispositif de fentes d'Young, dont la distance  $a$  entre les deux trous est réglable (Fig.2).

Étant donné l'éloignement de la source, on suppose que, quel que soit le point de la source S (repéré par l'angle  $\theta_S$ ), l'intensité infinitésimale émise autour de ce point et reçue au point M est identique pour les chemins passant par A ou B. On notera  $\mathcal{I}(\theta_S)d\theta_S = dI_A(S) = dI_B(S)$  ces intensités infinitésimales et  $I_{\text{tot}} = \int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S)d\theta_S$  l'intensité totale.

1. En utilisant la question A.2.2, donner l'intensité  $dI_M(S)$  due au point source S en fonction de  $\theta_S$  et de  $\theta_M$ . Que se passe-t-il sur le système de franges lorsque  $\theta_S$  varie?

2. Donner l'expression de l'intensité totale  $I_M(S)$  due à l'ensemble de la source  $\Sigma$ .
3. En utilisant l'identité  $\cos(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$  et en faisant intervenir l'intégrale  $\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{2i\pi \frac{a\theta_S}{\lambda}} d\theta_S$ , mettre le résultat sous la même forme que la formule (1).
4. En déduire le théorème de Van Cittert - Zernike (version simplifiée) :

$$\gamma_{AB}(a) = \frac{|\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) e^{2i\pi \frac{a\theta_S}{\lambda}} d\theta_S|}{\int_{\Sigma} \mathcal{I}(\theta_S) d\theta_S} = \frac{|\tilde{\mathcal{I}}(\frac{a}{\lambda})|}{I_{\text{tot}}}$$

où l'on a introduit la définition de la transformée de Fourier d'une fonction  $f$ :  $\tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi ux} dx$ .

## C Applications en interférométrie stellaire

En 1920, Michelson eut l'idée de mesurer le diamètre des étoiles en étudiant leur propriété de cohérence spatiale. Dans ce cas, deux télescopes jouent le rôle des trous d'Young (Fig.3).

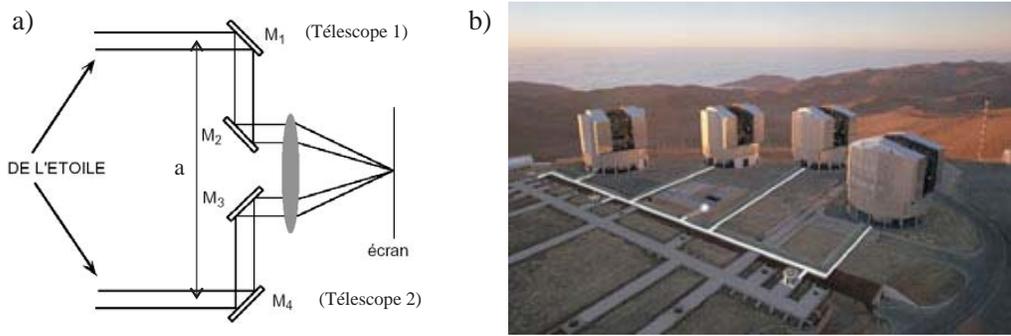


Figure 3: (a) Principe de l'interférométrie stellaire. (b) Télescopes en série du VLTI (Chili)

### C.1 Cas d'une étoile simple

1. On considère une source (une étoile par exemple) pour laquelle l'intensité est uniforme sur tout son diamètre angulaire  $\Delta\theta$ :

$$\mathcal{I}(\theta_S) = \frac{I_{\text{tot}}}{\Delta\theta} \text{rect}\left(\frac{\theta_S}{\Delta\theta}\right) \quad \text{où } \text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer le degré de cohérence spatiale  $\gamma_{AB}(a)$ . Pour quelle valeur de  $\Delta p_S = a\Delta\theta/\lambda$  observe-t-on une annulation du contraste? Donner une interprétation physique.

2. A quelle distance maximale doit-on placer deux trous pour observer des interférences avec le soleil ( $\Delta\theta_{\text{soleil}} = 0.5^\circ$ )? la lune? ( $1^\circ \simeq 17 \text{ mrad}$ )
3. **Expérience de Michelson:** En observant l'étoile Bételgeuse, Michelson obtint une disparition du contraste des franges pour un écartement des miroirs de 2.5 m. Quel est le diamètre angulaire de Bételgeuse?
4. **Résolution du VLTI:** Sachant que les télescopes du VLTI (itVery Large Telescope Interferometer), situés au Mont Paranal au Chili, sont distants au maximum de 200 m, quelle est la résolution angulaire théoriquement accessible?

## C.2 A titre d'exercice : Cas d'une étoile double

1. On considère deux étoiles, de même diamètre angulaire  $\Delta\theta_e$ , séparées par un angle  $\theta_s$ . Calculer  $\gamma_{AB}(a)$ .
2. En déduire un moyen de mesurer l'écartement angulaire  $\theta_s$ .
3. En 1920, l'astronome Anderson a réussi à mesurer l'écartement  $\theta_{\text{Cap}} = 0.05''$  entre les deux étoiles constitutives de l'étoile binaire *Capella*. De quelle distance a-t-il dû séparer les miroirs ?

## TD2 : Cohérence temporelle Théorème de Wiener-Khintchine

Le but de ce TD est de revenir sur la notion de **cohérence temporelle** vue en cours et son lien avec la notion de corrélation temporelle du champ électromagnétique. Nous rappellerons en particulier le lien entre cette corrélation et la répartition spectrale d'intensité de la source.

### A Degré de cohérence temporelle - Interféromètre de Michelson

#### A.1 Position du problème

On s'intéresse ici à un champ électromagnétique, d'amplitude complexe  $E(t)$ , produit par une source quelconque, supposée *stationnaire*. Suivant les sources utilisées, les fluctuations du champ peuvent être négligeables (lumière quasiment monochromatique pour un laser), ou bien très importantes (lumière chaotique pour la lumière naturelle) (voir Fig. 1). Ces fluctuations vont se traduire par une perte de contraste des interférences sur un interféromètre de Michelson et vont donc pouvoir être mesurées.

N. B. : De la même manière que pour le TD1, on ne considérera ici que des *processus stationnaires*, i.e. pour lesquels les moyennes  $\langle \dots \rangle$  ne dépendent pas du temps. Par exemple, nous avons :  $I_0 = \langle |E(t)|^2 \rangle = \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle$ , quel que soit  $\tau$ .

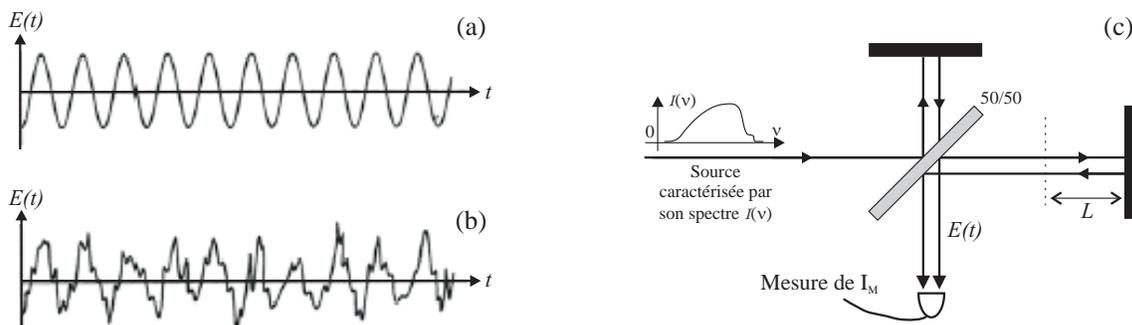


FIGURE 1 – Allure de l'évolution temporelle du champ  $E(t)$  : (a) pour une source laser et (b) pour de la lumière naturelle ; (c) Interféromètre de Michelson utilisé pour mesurer le degré de cohérence temporelle. Le bras horizontal est plus long d'une longueur  $L$ .

#### A.2 Degré de cohérence temporelle

Par analogie avec le degré de cohérence spatiale vu au TD1, on définit le *degré complexe de cohérence temporelle*, afin de quantifier l'importance des fluctuations du champ  $E(t)$  :

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E(t)E^*(t + \tau) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle}. \quad (1)$$

1. Montrer que  $g^{(1)}(0) = 1$ . Quelle propriété permet de montrer que  $0 \leq |g^{(1)}(\tau)| \leq 1$  ?

2. Calculer  $g^{(1)}(\tau)$  pour une source monochromatique de fréquence  $\nu_0$ . Une telle source est-elle réalisable en pratique ?
3. Pour une source réelle, quelle est la limite de  $g^{(1)}(\tau)$  quand  $\tau \rightarrow \infty$  ? En déduire l'allure générale de  $|g^{(1)}(\tau)|$  pour une source réelle. Comment définir intuitivement un temps de cohérence caractéristique  $\tau_c$  ? Quelle est l'interprétation en terme de train d'onde ?

### A.3 Interféromètre de Michelson

On considère maintenant l'interféromètre de Michelson de la Fig. 1(c), pour lequel un miroir est mobile, de sorte que la différence de longueur  $L$  entre les deux bras est réglable.

1. Exprimer l'intensité  $I_M = \langle |E_M|^2 \rangle$  à la sortie de l'interféromètre en fonction de  $g^{(1)}(\tau)$ , où  $E(t)$  est l'amplitude complexe du champ sortant du bras fixe de l'interféromètre (voir Fig. 1). On notera  $I_0 = \langle |E(t)|^2 \rangle = \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle$ . Que vaut  $\tau$  en fonction de  $L$  ?
2. Que vaut  $I_M(\tau)$  pour une source monochromatique de fréquence  $\nu_0$  ?
3. Pour une source quelconque, on pose  $g^{(1)}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)|e^{i\alpha(\tau)}$ . Exprimer  $I_M(\tau)$ .
4. En comparant avec une source monochromatique, représenter une allure plausible de  $\alpha(\tau)$  pour une source quasi-monochromatique autour de la fréquence  $\nu_0$  (on ne demande pas de démonstration ici). En déduire l'allure de l'intensité  $I_M(\tau)$ . Pourquoi peut-on définir localement un contraste  $C(\tau)$  ?
5. En déduire que l'interféromètre de Michelson permet de caractériser le module du degré de cohérence temporelle  $|g^{(1)}(\tau)|$ .
6. Que se passe-t-il si l'on augmente trop la distance  $L$  ?

## B Théorème de Wiener-Khintchine - Cas des sources quasi-monochromatiques

Nous considérerons ici le cas des sources (lampes à vapeurs atomiques, lasers) pour lesquelles la largeur spectrale  $\Delta\nu$  est très petite devant la fréquence optique centrale  $\nu_0$ . Ces sources sont dites "quasi-monochromatiques". Pour ces sources, le théorème de Wiener-Khintchine prend une forme particulièrement simple.

La source est caractérisée par sa répartition spectrale  $\mathcal{I}(\nu)$  [avec  $\mathcal{I}(\nu) = 0$  pour  $\nu < 0$ , voir l'encart Fig. 1(c)], de telle sorte que la contribution à l'intensité totale des fréquences comprises entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  vaut  $dI(\nu) = \mathcal{I}(\nu)d\nu$ . L'intensité totale de la source est alors donnée par  $I_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} \mathcal{I}(\nu)d\nu$ .

### B.1 Expression de l'intensité

1. A partir de la question A.3.2, donner la contribution à l'énergie totale en sortie de l'interféromètre  $dI_M(\nu)$ , pour les fréquences comprises entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ . Comment évolue  $dI_M(\nu)$  quand  $\nu$  varie ? Que dire *a priori* de l'évolution du contraste  $C(\tau)$  ?
2. Donner l'expression générale de l'intensité  $I_M(\tau)$  sous la forme d'une intégrale.

### B.2 Expression du contraste pour un spectre symétrique

On définit l'intensité spectrale normalisée et centrée  $\mathcal{I}_{n,c}(\nu)$  par  $\mathcal{I}(\nu) = I_{\text{tot}} \mathcal{I}_{n,c}(\nu - \nu_0)$ . On s'intéressera au cas où la répartition spectrale  $\mathcal{I}(\nu)$  est *symétrique* par rapport à la fréquence centrale  $\nu_0$ .

1. Représentez l'allure de  $\mathcal{I}_{n,c}(\nu)$ . Vérifiez que  $\mathcal{I}_{n,c}$  est une fonction paire et normalisée :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_{n,c}(\nu) d\nu = 1$ .
2. Exprimez  $I_M(\tau)$  sous la forme de la question A.3.4.

3. En déduire que le contraste des interférences est donné par (théorème de Wiener-Khintchine) :

$$C(\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\tilde{\mathcal{I}}_{n,c}(\tau)| = |g^{(1)}(\tau)| \quad (2)$$

[ On rappelle la définition de la transformée de Fourier :  $\tilde{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi ux} dx$  ].

### B.3 A titre d'exercice : Expression du contraste dans le cas général

Montrer que l'expression du contraste est en fait également valide si la répartition spectrale est quelconque (mais toujours de largeur faible devant  $\nu_0$ ). Pour cela :

On exprimera l'intensité  $I_M$  en fonction de  $I_{\text{tot}}$ ,  $\nu_0$ ,  $|\tilde{\mathcal{I}}_{n,c}(\tau)|$  et  $\phi(\tau)$ . Ces deux derniers termes étant définis à partir de la transformée de Fourier de  $\mathcal{I}_{n,c}$  :  $\tilde{\mathcal{I}}_{n,c}(\tau) = |\tilde{\mathcal{I}}_{n,c}(\tau)| e^{i\phi(\tau)}$ .

On admettra la propriété suivante des transformées de Fourier : comme la fonction  $\mathcal{I}_{n,c}(\nu)$  prend des valeurs significatives sur un intervalle  $\Delta\nu$  centré en zéro, le temps typique de variation de  $\phi(\tau)$  et  $|\tilde{\mathcal{I}}_{n,c}(\tau)|$  est de l'ordre de  $\Delta\tau = 1/\Delta\nu \gg 1/\nu_0$ .

## C Applications

### C.1 Répartition spectrale rectangulaire

1. Calculer le contraste  $C(\tau)$  pour une répartition spectrale rectangulaire de la largeur  $\Delta\nu$ , centrée autour de  $\nu_0$  :

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{I_{\text{tot}}}{\Delta\nu} \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right) \quad \text{où } \text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

2. Pour quelle valeur  $\tau_c$  les franges disparaissent-elle ? Que vaut dans ce cas la variation de l'ordre d'interférence  $\Delta p$  (rappel  $p = \delta/\lambda = 2L/\lambda = \nu\tau$ ) ? Donner une interprétation physique simple pour l'annulation du contraste.
3. Que vaut la longueur de cohérence  $l_c$  ? Exprimer  $l_c$  en fonction de la finesse de la source  $\mathcal{N} = \nu_0/\Delta\nu = \lambda_0/\Delta\lambda$  ? Quelle est l'interprétation de cette finesse ?
4. Pour une lampe à vapeur de Mercure moyenne pression ( $\lambda_0 = 546 \text{ nm}$ ), la finesse vaut  $\mathcal{N} = 5000$ . Que vaut la longueur de cohérence  $l_c$  ? Même question pour une lampe basse pression, pour laquelle  $\mathcal{N} = 10^5$  ?
5. Mêmes questions un laser HeNe à  $\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$  avec  $\mathcal{N} = 10^6 - 10^7$  et un laser à  $\text{CO}_2$  stabilisé ( $\mathcal{N} = 10^{11}$  !!).
6. On cherche à mesurer la largeur spectrale d'une source en déterminant le point d'annulation du contraste. Si le bras mobile du Michelson a une extension maximale  $L_{\max}$ , quelle est sa résolution maximale  $\Delta\nu_{\text{res}}$  accessible ?

### C.2 A titre d'exercice : cas d'un doublet

1. On considère maintenant un doublet que l'on modélise par la répartition spectrale suivante :

$$\mathcal{I}(\nu) = \frac{I_{\text{tot}}}{2\Delta\nu} \left[ \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_1}{\delta\nu}\right) + \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_2}{\delta\nu}\right) \right] \quad (4)$$

avec  $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2$  et  $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2$ . Donner la figure d'interférence obtenue.

2. Application au doublet du sodium  $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$  et  $\delta\lambda = 10^{-2} \text{ nm}$ .

## D A titre d'exercice : Spectroscopie par transformée de Fourier

1. A partir de la question B.1.2, donner l'expression de l'intensité totale  $I_M$  en faisant intervenir l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_s(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu$ , où  $\mathcal{I}_s$  est le spectre symétrisé défini par  $\mathcal{I}_s(\nu) = (\mathcal{I}(\nu) + \mathcal{I}(-\nu))/2$ .
2. En comparant le résultat de la question précédente et celui de la question A.3.1, montrer que :

$$\operatorname{Re}\{g^{(1)}(\tau)\} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}_s(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu}{I_{\text{tot}}} = \frac{\tilde{\mathcal{I}}_s(\tau)}{I_{\text{tot}}} \quad (5)$$

3. En déduire une méthode pour mesurer le spectre  $\mathcal{I}(\nu)$  d'une source.

## TD 3-4 : Localisation des franges, miroir de Lloyd

Le but de ce TD est d'introduire la notion de **localisation des franges** dans le cadre d'un phénomène d'interférence à 2 ondes. Nous démontrerons le théorème de localisation, et exprimerons les conditions de visibilité des franges pour la taille de la source. Ces propriétés générales seront ensuite appliquées aux cas particuliers de la lame à face parallèles et du coin d'air. Enfin nous verrons comment ces résultats sont utilisés pour le contrôle interférométrique des propriétés d'une lame de verre (défauts de surface ou d'épaisseur).

### A. Aspect général

Soit  $S$  une source ponctuelle monochromatique d'émission isotrope éclairant un interféromètre. En un point  $M$  de l'espace se rencontrent deux rayons issus de  $S$ , cf. Fig.1(a).

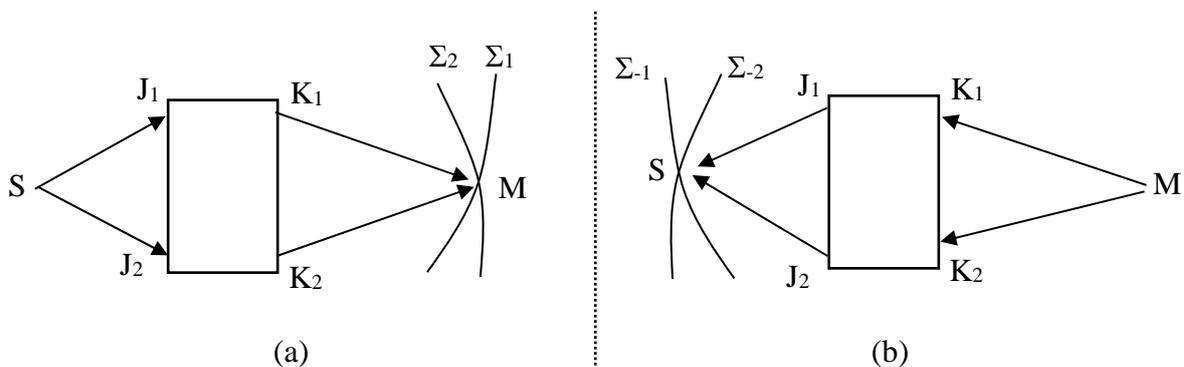
1. Ecrire l'état d'interférence au point  $M$ .
2. Où sont localisées les franges ?
3. Que se passe-t-il si la source n'est pas parfaitement monochromatique ?

La source est maintenant une source quasi monochromatique (suffisamment fine pour négliger la cohérence temporelle) et étendue autour du point  $S$ . Elle est constituée d'une infinité de sources ponctuelles incohérentes, qui engendrent chacune un système de franges.

4. Peut-on encore observer des franges non localisées ? Pourquoi ?

### B. Théorème de localisation

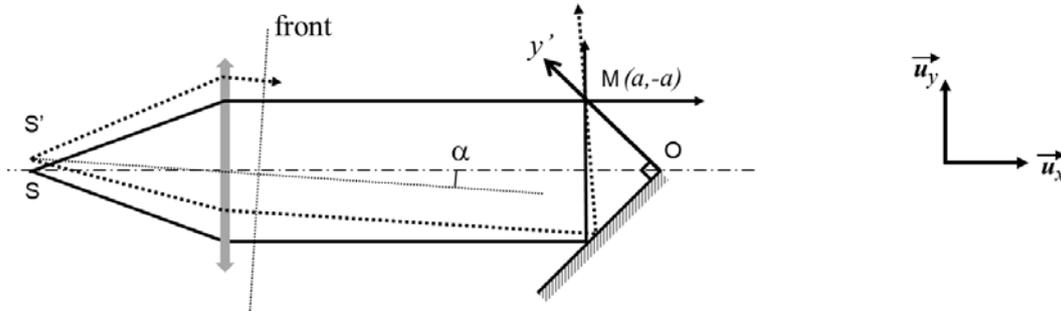
On considère à nouveau une source quasi-monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , étendue autour d'un point  $S$ . Pour exprimer le théorème de localisation des franges, on va chercher à évaluer comment évolue l'état d'interférence au point  $M$  lorsque que l'on déplace le point source de  $S$  à un point  $S'$  très proche. Rappeler le raisonnement sur l'évolution de  $p$  avec la position de la source à l'aide de la Fig.1(b) et de l'angle entre eux des rayons  $SJ_1$  et  $SJ_2$ .



– Figure 1 : schémas pour le théorème de localisation –

## B.1 Applications : Franges du miroir de Lloyd et géométries apparentés.

Nous allons étudier une configuration où les deux fronts d'onde sont des plans. La source correspondante est un point  $S$  à l'infini. Dans un tel cas, on peut repérer la source par un angle  $\alpha$  et la situer au plan focal d'une lentille. La question de la localisation des franges revient donc à minimiser la variation  $dp(M, \alpha)/d\alpha$  où  $p$  est l'ordre au point  $M$  considéré pour un angle de la source.



– Figure 2 : Dispositif du miroir de Lloyd. –

La figure 2 présent le dispositif dit du *miroir de Lloyd*, un miroir solidaire d'un écran  $Oy'$  à angle droit, sur lequel on observe ou bien l'on utilise les franges (on peut insoler des résines de façon à former des réseaux de diffraction ... ).  $OM$  fait  $45^\circ$  avec l'axe  $SO$  de l'optique d'éclairage, l'écran et le miroir étant donc symétriques. Le point  $M$  est repéré par ses coordonnées  $(a, -a)$  dans le repère  $Oxy$  indiqué.

1) Cas  $\alpha = 0$

- Donner une expression du champ  $A_1(\vec{r})$  et  $A_2(\vec{r})$  des deux ondes représentées, en les assimilant à des ondes planes suivant les axes  $x, y$ .
- Ecrire l'intensité correspondante en  $M$  en faisant apparaître le terme d'interférence. Que vaut l'ordre en  $M$ ,  $p_M(a, \alpha=0)$  ?
- L'expliciter en fonction de l'abscisse le long de l'écran notée  $y'$ .

2) Que vaut l'interfrange  $i$  ? Montrer qu'elle est reliée simplement à  $\Delta\vec{k}$ , la différence entre les deux vecteurs d'onde de l'onde plane.

3) Cas  $\alpha$  quelconque, dans l'approximation  $\alpha \ll 1$  rad.

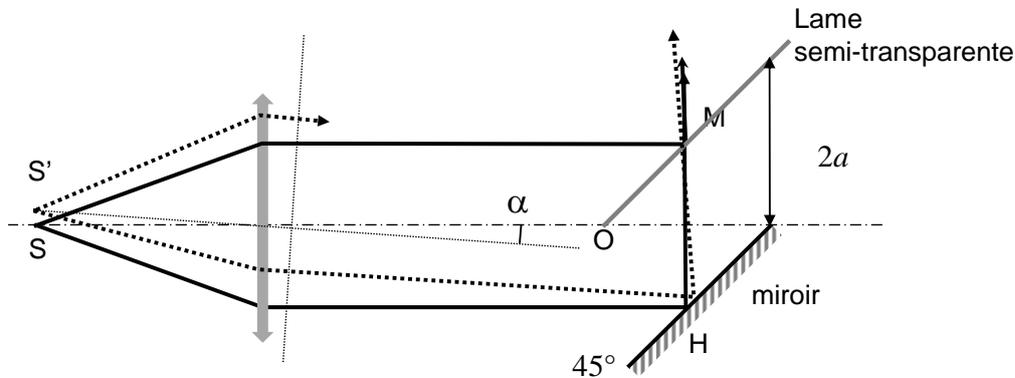
- Dessiner le front d'onde de l'onde venant de  $S'$  par le haut et passant par  $M$ . En se basant alors sur le stigmatisme, montrez qu'il est possible d'approximer la différence de marche en se basant sur le point d'impact du rayon pointillé sur le miroir pour le rayon du bas, à l'aide des propriétés remarquables de la figure ainsi formée.
- Calculer ainsi le nouvel ordre d'interférence en  $M$ ,  $p_M(a, \alpha)$ .
- Expliciter  $\partial p_M(a, \alpha) / \partial \alpha$ .

4) En quel endroit les franges se localisent-elles lorsque la source s'étend angulairement ?

## B.2 Interférence avec lame semi-transparente

On fait un montage différent du précédent, illustré ci-dessous : une lame séparatrice sert ici à combiner les faisceaux incidents, avec des angles des dioptrés ou miroirs à  $45^\circ$  par rapport au faisceau de départ.

La séparatrice et le miroir sont séparés par la distance verticale de  $2a$ .

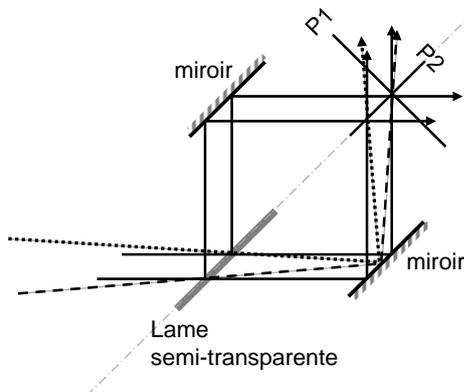


– Figure 3 : Dispositif avec lame semi-transparente –

- 1) Dans le cas  $\alpha = 0^\circ$ , comment se propagent les deux rayons émergents ?  
Que vaut leur  $\Delta \vec{k}$  ?
- 2) Avec des constructions géométriques quasi-identiques à celles du B.1, montrer que l'ordre d'interférence pour  $\alpha = 0^\circ$  est constant, puis que pour un angle  $\alpha$  non nul, on a une variation de l'ordre d'interférence analogue à celle du B1.
- 3) Vérifier que l' « interfrange » correspond bien au  $\Delta \vec{k}$  trouvé précédemment.
- 4) On appelle souvent « séparatrice de faisceaux » une lame semi-transparente. Est-ce le rôle qu'elle joue ici ? Les deux rayons qui interfèrent ont-ils été *séparés* (ou *divisés*) à partir d'un rayon commun ?

## B.3 Système symétrique

On considère un système symétrique avec une séparatrice et deux miroirs de renvoi montés à  $45^\circ$  qui assure la même fonction que le miroir de Lloyd, formant deux faisceaux à  $90^\circ$



– Figure 4 : Formation de franges de deux faisceaux orthogonaux avec une séparatrice et deux miroirs. –

- 1)
  - a) Pour des rayons à  $\alpha = 0^\circ$  (traits pleins), où se situe le lieu des points M tels que  $p=0$  : est-ce le plan P1 ou le plan P2 ?
  - b) A l'aide du B.1, préciser sur lequel de ces deux plans on obtient l'interfrange  $i$ .

2) Dans le cas d'un petit angle  $\alpha \neq 0^\circ$ , on a esquissé un rayon en trait pointillé et un autre en tirets. Compléter avec l'autre rayon créé à la séparatrice.

3) Conclure sur la tolérance de  $p$  à l'angle ( $\equiv$  étendue de la source) dans le plan P2.

4) A l'aide de la construction générale d'une surface de localisation, retrouver ce résultat.

#### B.4 Visibilité des franges

La zone de localisation correspond à une « survivance » des franges au premier ordre. Toutefois, si la source est trop étendue, les franges localisées vont également disparaître.

1. Ecrire l'inégalité imposée par le critère de « bonne » visibilité des franges (modulation supérieure à 80% dans le cas d'un interféromètre à division d'amplitude).

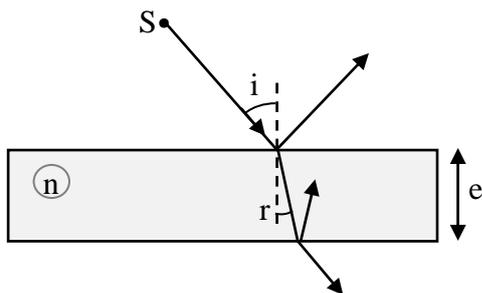
2. En déduire la tolérance en  $\alpha$  pour les cas B.1 et B.2

3. Dans un cas différent où l'on aurait sur une surface de localisation une annulation de la dérivée première  $dp_M(\alpha)/d\alpha=0$ , mais pas de la dérivée seconde, on peut alors écrire une forme générique  $p_M = B \alpha^2 / \lambda$  avec B une constante.

Commenter la tolérance angulaire obtenue dans un tel cas.

### C. La lame à faces parallèles

On considère une lame de verre à faces rigoureusement parallèles, d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n=1,5$ . On l'éclaire avec une source  $S$  étendue quasi-monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 500$  nm (Figure 5).



– Figure 5 : lame à faces parallèles –

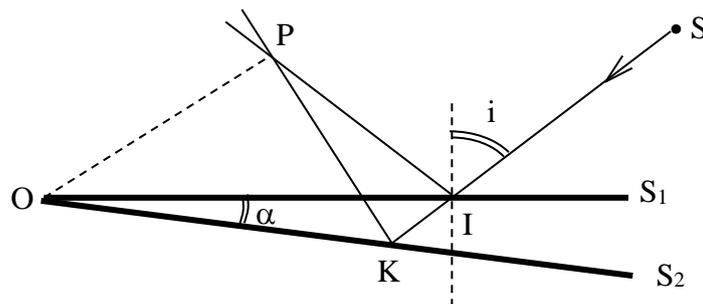
1. Pour une incidence quasi-normale, calculer les coefficients de réflexion et de transmission en intensité de chacune des faces de la lame. En déduire l'intensité des deux ondes susceptibles d'interférer soit en réflexion soit en transmission. Où faut-il préférentiellement observer les franges ? Que vaut alors le contraste  $C_{coh}$  ?

2. Préciser quantitativement la finesse spectrale  $N = \lambda_0 / \Delta\lambda = \nu_0 / \Delta\nu$  de la source nécessaire pour obtenir une « bonne » visibilité.

3. Quelle source choisiriez-vous pour visualiser les franges si  $e=1$  cm,
  - lampe à vapeur de mercure moyenne pression = finesse environ 5000
  - lampe à vapeur de mercure basse pression = finesse  $10^5$
  - laser hélium-néon = finesse  $10^6$  à  $10^8$
4. A partir du théorème démontré dans la partie B, déduire le lieu de localisation des franges d'interférence.
5. On considère des rayons incidents d'inclinaison  $i$  donnée. Calculer la différence de marche entre les rayons réfléchis par les deux faces en fonction de l'angle réfracté  $r$ . Quelle est l'allure des franges au foyer d'une lentille ?
6. Que se passe-t-il si on augmente le diamètre de la source ?

## D. Le coin de verre

Soit un coin d'air compris entre 2 lames de verre (surfaces  $S_1$  et  $S_2$ ) faisant un angle  $\alpha$  très faible et étant suffisamment minces pour négliger la réfraction. Pour un rayon issu de la source  $S$ , on note  $I$  le point d'intersection sur  $S_1$  et  $K$  celui sur  $S_2$  (voir Fig. 6, angles exagérés). On note  $O$  le point d'intersection entre l'arête de la lame et le plan de la figure.



- Figure 6 : coin d'air -

### D.1 Localisation des franges

Pour un angle  $\alpha$  très faible, on peut montrer que les franges se localisent sur un cercle passant par  $O$  et de diamètre  $OS'$  où  $S'$  est l'image de  $S$  par rapport à  $S_1$ .

1. Si la source est rejetée à l'infini, comment évolue le lieu de localisation ? Cas particulier de l'incidence normale ?

Dans le cas d'une lame prismatique (coin de verre) d'angle très petit, on montre que la différence de marche au point  $P$  s'écrit :

$$\Delta = 2ne \cos r + \lambda / 2$$

où  $r$  est l'angle de réfraction et  $e$  l'épaisseur de la lame au point  $I$ .

2. Pour une incidence normale, comment les franges d'interférence sont-elles disposées dans le plan de localisation ?

## D.2 Visibilité des franges

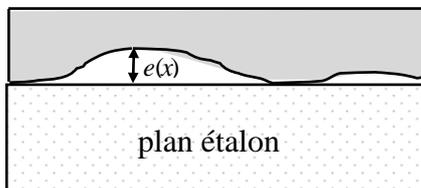
On se place toujours dans le cas d'une incidence normale et on considère une lame de verre faiblement prismatique ( $\alpha \ll 1$ ).

1. Calculer  $\Delta p$  en fonction de  $n$ ,  $e$  et  $\Delta\theta$ , l'ouverture angulaire de la source.
2. En déduire la condition sur l'ouverture angulaire  $\Delta\theta$  de la source pour obtenir une « bonne » visibilité des franges.

A.N. pour  $e = 1\text{cm}$  et  $\lambda_o = 500\text{nm}$ .

## E. Applications au contrôle interférométrique

On considère maintenant une lame de verre ( $n=1,5$ ) qui possède (comme toute lame de verre réelle) des petits défauts de surface. Pour les observer, on place cette lame sur un plan étalon de planéité  $\lambda/20$  (Fig.7). Ainsi, en observant les variations d'épaisseur de la lame d'air  $e(x)$ , on en déduit les défauts de surface. On supposera que ces défauts varient lentement suivant  $x$ , de sorte que l'on peut considérer que la pente locale est très faible. On pourra donc appliquer les résultats de la partie D.



– Figure 7 : vue de côté –



– Figure 8 : figure d'interférence –

1. Quelles sont les deux ondes dont l'interférence nous donne cette information ? Où sont localisées ces franges ?
2. Déterminer la condition sur la *finesse spectrale de la source* qui permet d'observer ces franges sans être gêné par les autres franges.
3. Que vaut l'interfrange en épaisseur  $\Delta e$  ? Comment « lire » l'état de la surface à partir de l'interférogramme obtenu ?
4. Déterminer l'épaisseur du défaut sur toute la pupille à partir de l'interférogramme de la Figure 8.

## TD6 : Le Fabry-Perot. Propriétés et applications

### A Rappel des propriétés générales

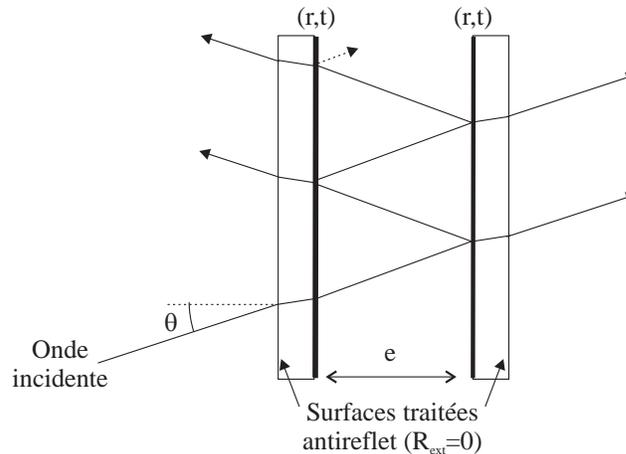


FIGURE 1 – Principe du Fabry-Perot

On considère un Fabry-Perot, d'épaisseur  $e$ , constitué de deux lames de verre traitées sur les faces intérieures, de coefficient de réflexion  $R = |r|^2$ . On néglige l'absorption et on considère que les faces extérieures ont un traitement anti-reflet parfait ( $R_{\text{ext}} = 0$ ). Le Fabry-Perot est illuminé par une onde plane monochromatique incidente sous l'angle  $\theta$  et on s'intéresse aux interférences à l'infini.

1. Rappeler l'expression de l'intensité totale  $I_T$  en fonction de  $I_0$  l'intensité incidente,  $p$  (l'ordre d'interférence correspondant à deux rayons sortant successivement du Fabry-Perot) et de la quantité  $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$ . Que vaut  $p$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  et de l'épaisseur  $e$  ?
2. Représenter l'allure de la fonction  $I_T/I_0$  en fonction de  $p$ .
  - Que vaut  $I_{\text{max}}$  ?  $I_{\text{min}}$  ?
  - Représenter également et sans calcul l'allure de l'intensité réfléchie  $I_R$ .
3. On se place dans le cas où le miroir est *peu réfléchissant* :  $R \ll 1$  et  $T \simeq 1$ .
  - A quoi ressemble dans ce cas la courbe de  $I_T$  ?
  - Donner l'expression de l'intensité réfléchie  $I_R$ . A quoi cela correspond-t-il de connu ?

→ Dans la suite, on se place dans le cas de miroirs *très réfléchissants* :  $R \simeq 1$  et  $T \ll 1$ .
4. Représenter l'allure de  $I_T$  dans ce cas.
5. On définit la finesse  $\mathcal{F}$  à partir de la largeur à mi-hauteur  $\delta p$  par :  $\mathcal{F} = 1/\delta p$ .
  - Justifier pourquoi  $\delta p \ll 1$ .
  - Du coup quelle approximation peut-on faire dans l'expression de  $I_T$  ?
  - Donner l'expression de  $\mathcal{F}$  en fonction de  $R$  puis en fonction de la transmission  $T$  ( $R \simeq 1$ ).

- En comparant avec la fonction de transmission d'un réseau, en déduire *l'interprétation physique* de la finesse.
6. Représenter l'allure de  $I_T(\nu)$  en fonction de la fréquence  $\nu$ .  
Que vaut l'intervalle de fréquence  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$  entre deux résonances successives ? On appelle cette valeur l'Intervalle Spectral Libre (*ISL*), ou en anglais "Free Spectral Range" (*FSR*).
  7. Comment s'exprime la résolution en fréquence  $\delta\nu_{\text{FP}}$  en fonction de  $\mathcal{F}$  et de l'intervalle spectral libre  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$  ?
  8. Quel est le pouvoir de résolution  $\mathcal{PR} = \nu_0/\delta\nu_{\text{FP}}$  en fonction de l'ordre  $p_0$  ? Comparer avec le pouvoir de résolution d'un réseau.
  9. • Application numérique : Donner le pouvoir de résolution pour un FP standard de longueur  $e_0 = 10$  cm et de finesse  $\mathcal{F} = 300$  (on se placera en incidence normale). On prendra  $\lambda_0 = 500$  nm.  
• Quelle doit être la dimension d'un réseau pour atteindre la même sensibilité (on prendra un réseau de périodicité 1200 tr/mm qui diffracte dans l'ordre  $k=1$ ) ?

## B Filtrage de fréquence (inspiré de l'examen 2005-2006)

Une application du Fabry-Perot consiste à filtrer spectralement la lumière incidente. On peut ainsi se débarrasser de certaines raies gênantes. On se placera ici en incidence normale.

On considère une source qui possède deux raies à  $\lambda_1 = 310,0$  nm et  $\lambda_2 = 310,3$  nm. On veut filtrer la deuxième raie qui est  $10^3$  fois plus intense que la première ( $I_{\text{inc},2} = 10^3 I_{\text{inc},1}$ ).

1. Comment choisir l'épaisseur  $e_0$  du FP de manière à filtrer le plus efficacement la raie à 310,3 nm ? On choisira l'épaisseur la plus petite.
2. Que vaut, en fonction de  $R$ , le rapport d'intensité entre les deux raies à la sortie du FP ?
3. Donner la valeur de  $R$  permettant d'avoir des intensités égales des deux raies à la sortie.
4. Que vaut alors la finesse  $\mathcal{F}$  du FP ? Et que vaut sa résolution  $\delta\lambda_{\text{PF}}$  ?

## C A titre d'exercice : Fabry-Perot à balayage

Une autre application du Fabry-Perot consiste à étudier la répartition spectrale d'une source. On considère le Fabry-Perot de la Fig. 2(a). On peut balayer finement l'épaisseur  $e = e_0 + \delta e$  grâce à une cale piézo-électrique (la précision est de quelques nanomètres pour les bonnes cales).

On considérera que les excursions de longueur  $\delta e$  sont très faibles (typiquement de l'ordre du  $\mu\text{m}$ ) par rapport à la longueur moyenne  $e_0$  (de l'ordre du cm). Dans toute la suite on se placera en incidence normale ( $\theta = 0$ ).

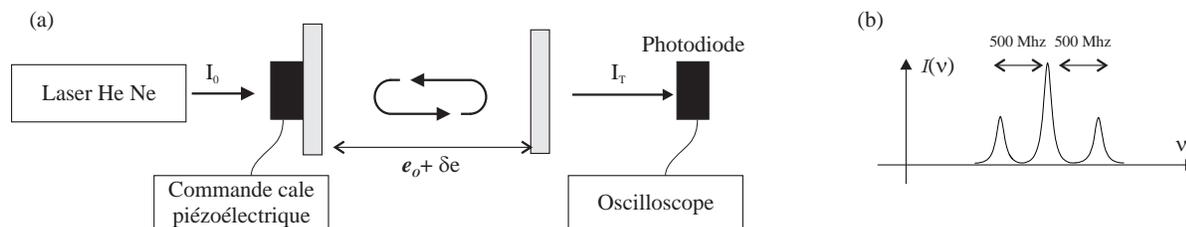


FIGURE 2 – (a) Principe du Fabry-Perot à balayage. (b) Spectre du laser HeNe.

### C.1 Principe du balayage

1. Pour une longueur d'onde  $\lambda_0$  fixée, donner l'allure de l'intensité transmise en fonction de l'épaisseur  $e$  du FP. On notera  $e_p$  la position du  $p^{\text{ième}}$  pic de résonance.
2. On considère maintenant une longueur d'onde voisine  $\lambda_0 + \delta\lambda$ . De quelle valeur  $\delta e_p$  se déplace le  $p^{\text{ième}}$  pic de résonance ? On donnera le résultat en fonction de  $\lambda_0$  et  $\Delta\lambda_{\text{ISL}}$ , puis de  $\nu_0$  et  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ .
3. Comment "lire" le spectre d'une source à l'aide de ce dispositif ? Que doit valoir  $\delta e$  pour balayer la totalité de l'intervalle spectral libre ?
4. Si  $e$  varie macroscopiquement, quels paramètres du FP sont affectés ?

### C.2 Observation du spectre de l'HeNe

La lumière incidente est produite par un laser HeNe à 633 nm. Ce laser comporte en fait 3 raies distantes de  $\Delta\nu = 500$  MHz (voir Figure 2(b)). On utilise un Fabry-Perot de grande finesse (de sorte que l'on considérera les pics de transmission comme étant infiniment fins) et ayant un intervalle spectral libre de  $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 2,5$  GHz.

L'alimentation produit des rampes triangulaires et on enregistre l'intensité transmise à l'aide d'une photodiode.

1. Quel est l'allure du signal observé à l'oscilloscope ?
2. Que se passe-t-il si on choisit un Fabry-Perot cinq fois plus grand, donc d'intervalle spectral libre  $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 500$  MHz coïncidant avec les écarts des raies ?