

# LP45 – PARAMAGNÉTISME, FERROMAGNÉTISME : APPROXIMATION DU CHAMP MOYEN

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

## Niveau : L3

### Commentaires du jury

- **2011-2013** : Le moment magnétique, son image semi-classique et son ordre de grandeur doivent être maîtrisés. De même, le lien avec l'ordre de grandeur de l'aimantation d'un aimant doit être connu.
- **2009-2010** : L'origine microscopique de l'interaction d'échange doit être discutée. L'influence de la température sur les propriétés magnétiques est au coeur de la leçon.
- **2006** : Il s'agit ici de présenter une interprétation microscopique du paramagnétisme et du ferromagnétisme.
- **1999** : On doit faire ressortir l'aspect phénoménologique du champ moyen. Cette leçon est une occasion de faire apparaître les propriétés essentielles d'une transition de phase.
- **1997** : L'expérience du clou chauffé au-dessus de la température de Curie n'est pas la seule illustration possible du ferromagnétisme. Il serait par exemple souhaitable que les candidats manipulent des ferrofluides et puissent citer des applications dans le domaine de l'enregistrement magnétique.

### Bibliographie

↗ <i>Electromagnétisme 2</i> , <b>Feynmann</b>	→ Toujours très bon, même pour l'élasticité
↗ <i>Magnétisme. Fondements</i> , <b>Trémolet de Lacheisserie</b>	→ Base de la leçon
↗ <i>Physique statistique</i> , <b>Diu</b>	→ Approche statistique de la transition
↗ <i>Electromagnétisme 4</i> , <b>BFR</b>	→ Bases EM, en complément
↗ <i>Physique de l'état solide</i> , <b>Kittel</b>	→ Complément du Diu
↗ <i>The theory of Magnetism I</i> , <b>D.C. Mattis</b>	→ pour aller plus (trop) loin

### Prérequis

- Électromagnétisme dans la matière
- Force centrale
- Physique statistique
- Transition de phase
- moments cinétiques quantiques

### Expériences

☞ ↗ MP16

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Origine du magnétisme</b>	<b>3</b>
1.1	Magnétisme dans la matière . . . . .	3
1.2	Lien entre l'aimantation et le moment magnétique . . . . .	4
1.3	Facteur gyromagnétique . . . . .	5
1.4	Modèle quantique du magnétisme . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Paramagnétisme</b>	<b>7</b>
2.1	Cadre de l'étude . . . . .	7
2.2	Calcul de l'aimantation . . . . .	7
2.3	Interprétation . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ferromagnétisme</b>	<b>10</b>
3.1	Interactions entre moments magnétiques . . . . .	10
3.2	Approximation du champ moyen . . . . .	11
3.3	Aimantation en champ nul et transition ferromagnétique/paramagnétique . . . . .	11

## Introduction

On a vu avant cette leçon pas mal de choses sur l'électromagnétisme dans le vide. Cependant dans la matière les choses peuvent être très différentes, et le couplage champ-matière est très important.



### Barreaux dans l'électroaimant

MP16



Il nous faut une explication pour ces phénomènes, Comme on l'a fait pour les matériaux diélectriques.

## 1 Origine du magnétisme

### 1.1 Magnétisme dans la matière

Dans un milieu diélectrique, un champ électrique extérieur  $\vec{E}$  cause l'apparition d'une polarisation induite  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$  (pour les milieux linéaires et isotropes). Ici c'est la même chose ! On applique un champ  $\vec{H}$  extérieur, et il s'en suit l'apparition d'une aimantation  $\vec{M}$ , dite aimantation induite.

Il apparaît donc une susceptibilité magnétique  $\chi_m$ , tenseur dans le cas général, qui décrit (et c'est important) MACROSCOPIQUEMENT la réponse du milieu.

On va faire l'hypothèse du milieu homogène ( $\chi_m$  indépendant de  $\vec{r}$ ) et du milieu isotrope ( $\chi_m$  scalaire). On a alors :

$$\vec{M} = \chi_m (\vec{H}, T, \dots) \vec{H} \quad (1)$$

On notera la dimension de  $\chi_m$  : pas de dimension.

On remarque trois réactions différentes là sur les barreaux. On en a un qui s'aligne, un qui s'antialigne, et un qui se colle. Excusez-moi, quoi la baise ?!

Et bien Fred, c'est très simple. La valeur de  $\chi_m$  définit le comportement ! En effet il existe une force sur les moment magnétiques :

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{B}) \quad (2)$$

Si on ajoute à cela le fait que  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , et que

$$\vec{B} = \mu (\vec{H}) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (3)$$

On voit vite ce qu'il se passe. Si  $\chi_m$  est très grand, on a des phénomènes non-linéaires et des mouvements amples : c'est le cas du **ferromagnétisme**, du fer, cobalt ou nickel.  $\chi_m \sim 10^2$  à  $10^6$ .

Si en revanche  $\chi_m$  est faible, on peut écrire, en approximant  $\mu \simeq \mu_0$ .

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{B}) \simeq \frac{\chi_m}{2\mu_0} \vec{\nabla} (\vec{B}^2) \quad (4)$$

Pour un matériau paramagnétique ( $\chi_m > 0$ ), la force est dirigée suivant le gradient du champ. À l'inverse, pour un matériau diamagnétique ( $\chi_m < 0$ ), la force est dirigée dans le sens opposé au gradient.

- les milieux diamagnétiques qui ne comportent que des atomes non magnétiques, ce magnétisme trouve son origine dans la modification du mouvement orbital des électrons sous l'effet de l'excitation magnétique :  $\chi_d < 0$  (loi de Lenz) et  $\chi_d \sim -10^{-5}$
- les milieux paramagnétiques possèdent de atomes portant des moments magnétiques permanents qui n'interagissent que très peu entre eux :  $\chi_p > 0$  et  $\chi_p \sim 10^{-4}$  à température ambiante
- les milieux ferromagnétiques possèdent des atomes portant des moments magnétiques permanents qui interagissent fortement entre eux :  $\chi_f > 0$  et  $\chi_f \gg \chi_p$ .

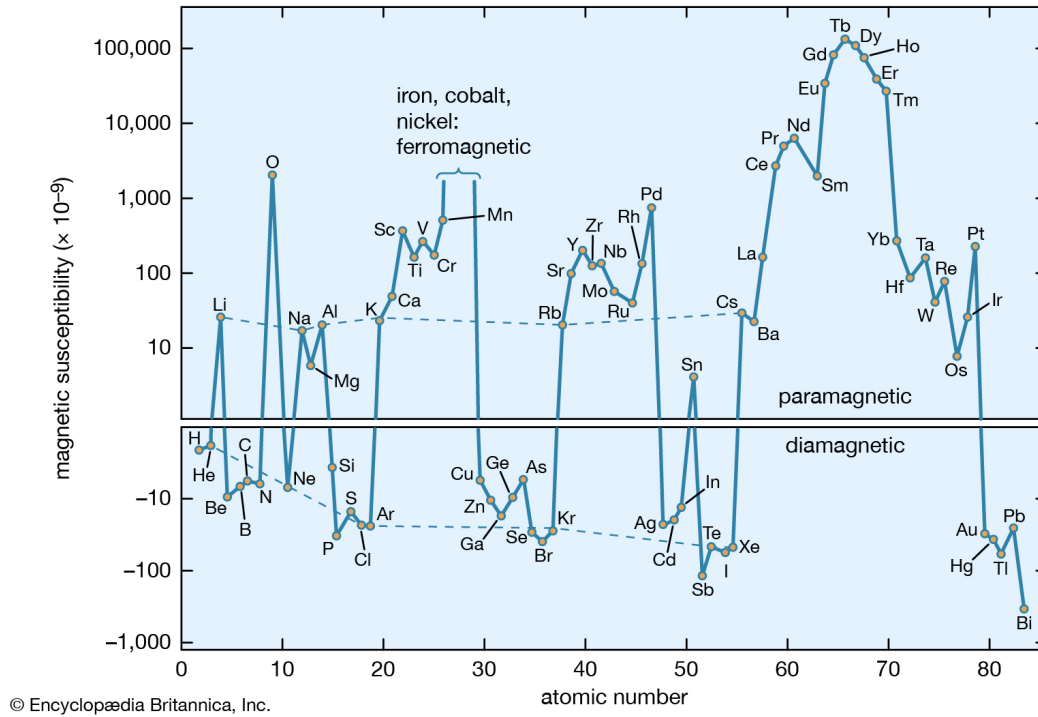


FIGURE 1 – La susceptibilité magnétique de quelques éléments.

Lien entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$

$$\vec{B} = \mu(\vec{H})\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

## 1.2 Lien entre l'aimantation et le moment magnétique

L'aimantation, comme on l'a déjà dit, est une grandeur macroscopique. Il existe cependant une valeur microscopique dont elle dérive, le moment magnétique  $\vec{M}$  (souvent aussi noté  $m\vec{u}$ ), tel que

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial V} \quad (5)$$

La définition de  $\vec{M}$  est alors, avec  $\vec{r}$  la position et  $\vec{j}$  la densité de courant :

$$d\vec{M} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{j} dV \quad (6)$$

Ainsi on obtient directement le couple magnétique appliqué par une induction :

$$\vec{\tau} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \quad (7)$$

Cette définition permet de calculer le moment magnétique de la Terre, comme  $\|\vec{\mathcal{M}}\| = \|\vec{B}\| \pi R_T^3 / \mu_0 = 7 \times 10^{22} \text{ A m}^2$ . L'induction magnétique terrestre, de  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$ , est faible, mais son moment est monstrueux du fait de la taille de l'engin.

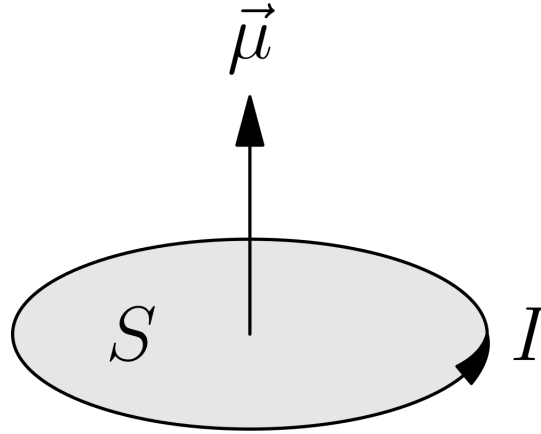


FIGURE 2 – Schéma d'une boucle de courant, que l'on étudie juste en dessous.

### Moment d'une boucle de courant de rayon $R$ :

On part de la définition du moment magnétique différentiel :

$$d\vec{\mu} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{j} dV$$

De là, on peut retrouver la forme intégrale de cette équation :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{j} dV$$

Dans le cas d'une particule chargée en rotation, cette expression devient :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} q \vec{r} \wedge \vec{v}$$

Dans le cas d'un fil infiniment fin comme cette boucle de courant :  $\vec{j} \cdot d\vec{S} = I$ , d'où :

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{I}{2} \int_{\partial S} \vec{r} \wedge d\vec{r} \\ \vec{\mu} &= I \vec{S} \end{aligned}$$

Il est bon de noter qu'énergétiquement, on a un potentiel qui apparaît :  $U = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$

## 1.3 Facteur gyromagnétique

Nous allons donner une description théorique permettant d'expliquer ces comportements. Pour cela on va se placer en description semi-classique, en considérant un électron qui tourne autour d'un noyau. Celui-ci a un moment magnétique que l'on calcule avec le modèle de la spire de courant :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge (-e) \vec{v} = \frac{-e}{2m_e} \vec{L} = \gamma_e \vec{L} \quad (8)$$

On peut alors subtilement définir le facteur gyromagnétique comme le lien entre  $\vec{L}$  et  $\vec{\mathcal{M}}$ , nommé  $\gamma_e \simeq 8.79 \times 10^{10} \text{ C kg}^{-1}$ . Il s'agit d'un lien qui va plus loin que le simple modèle semi-classique, puisqu'en quantique c'est toujours vérifié, si ce n'est que le facteur change selon les particules considérées.

Attention cependant, on sait que le moment cinétique est quantifié et du coup, on se doute qu'on va avoir des problèmes avec ce modèle. Par exemple l'expérience de Stern et Gerlach (1921) montre une quantification du moment magnétique d'atomes d'argent. De plus on a pas vraiment encore d'explication pour les différences de comportement.

## 1.4 Modèle quantique du magnétisme

↪ EdTdL p.248 ; Cohen-Tannoudji ch.VI (pour être clair sur le moment cinétique en quantique)

↪ BFR, p155 (pour la version rapide et facile)

On sait que le moment cinétique dans un électron est quantifié. Cette quantification a fait l'objet de beaucoup de cours, et nous n'entrerons pas dans les détails ici, cependant un bref rappel s'impose peut-être.

Le moment cinétique d'un atome est décomposé en son moment cinétique du noyau, et celui de son cortège électronique. Du fait de la variation en  $\frac{1}{m}$  et en  $\frac{1}{R}$  de ce moment, on considère que le moment cinétique du noyau est négligeable face à celui des électrons. Ainsi on a seulement à prendre en compte les électrons.

Pour un électron, le moment cinétique est quantifié. On choisit l'axe de quantification comme  $O_z \parallel \vec{B}$  sans perte de généralité pour simplifier les calculs. L'électron est alors décrit par des nombres quantiques, et wikipédia sera ton ami dans le résumé de ce que cela veut dire :

↪ [https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre\\_quantique#Nombre\\_quantique\\_principal\\_n](https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_quantique#Nombre_quantique_principal_n)

Soit  $j$  le nombre quantique de moment cinétique. Il définit les valeurs prises par  $l_z$  moment cinétique sur  $O_z$ .  $l_z = \pm j\hbar$ . On introduit alors le nombre de moment magnétique  $m_j \in \llbracket -j, j \rrbracket$ . Si  $j$  est entier, on a un nombre impair de possibilités, si il est demi-entier, on a un nombre pair.

Une mesure de  $\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_z$  donne  $\gamma m_j \hbar$ , avec  $\gamma = \frac{-ge}{2m}$ .

$$\mathcal{M}_z = -g\mu_B m_j \quad \text{avec } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2 \text{ le magnéton de Bohr} \quad (9)$$

On voit l'apparition de  $g$  le facteur de Landé. Ce facteur sans dimension et proche de l'unité est caractéristique de l'état étudié, et dépend des éléments considérés. Son origine profonde théorique et ses variations viennent de la théorie quantique des champs, et là, on ne touche pas.

L'expérience de **Stern et Gerlach**<sup>1</sup> permet de mesurer la valeur de  $j$  et de  $g$  pour un état atomique donné. Ainsi pour les atomes d'argent on trouve  $\mathcal{M}_z = \pm \mu_B$ , on en déduit que  $g = 2$ .

### interprétation de l'effet Zeeman

Les résultats précédents permettent de montrer qu'un état atomique gagne une énergie potentielle d'interaction avec le champ magnétique  $U = -\mathcal{M}B = m_j g \mu_B B$ .

Ainsi on a subdivision des états  $j$  en  $2j + 1$  sous-couches. Du fait que  $\Delta E = h\nu$ , on a directement une explication de la modification du spectre d'absorption et d'émission d'une lampe à vapeur sous champ magnétique.

1. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience\\_de\\_Stern\\_et\\_Gerlach](https://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Stern_et_Gerlach)

## 2 Paramagnétisme

♣ BFR p166 + *Thermodynamique statistique* Diu p444

### 2.1 Cadre de l'étude

Nous allons étudier le magnétisme des électrons localisés. Le système est complètement décrit quand on a une équation d'état de la forme  $M = M(T, B)$ .

Pour cela on considère des moments magnétiques permanents, c'est à dire des espèces possédant des électrons non-appariés. On suppose que les interactions entre les différents spins sont **négligeables**.

On considère alors un ensemble de  $N$  électrons sans interactions dans un volume  $V$ , en contact avec un thermostat à température  $T$ . On se place donc dans l'**ensemble canonique**. L'énergie d'interaction est

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{B} = g m_j \mu_B B = \pm \mu_B B$$

### 2.2 Calcul de l'aimantation

Les interactions entre les électrons sont négligées donc la fonction de partition se factorise et l'aimantation totale est la somme de toutes les contributions individuelles.

On considère dans un premier temps un seul électron, qui est un fermion de spin  $\frac{1}{2}$ , et pour lequel on a deux états possibles, un de spin "up"  $m_\uparrow = \mu_B$  aligné avec le champ magnétique  $\vec{B}$  d'énergie  $U_\uparrow = -\frac{1}{2} g \mu_B B = -\mu_B B$ ; et un de spin "down" opposé au champ magnétique d'énergie  $U_\downarrow = \mu_B B$ . Notons qu'on peut choisir n'importe quelle direction pour la quantification du spin mais il est plus simple pour les calculs de choisir la direction du champ magnétique imposé. La fonction de partition à une particule dans l'ensemble canonique est alors :

$$z = e^{-\beta U_\downarrow} + e^{-\beta U_\uparrow} = 2 \cosh(\beta \mu_B B) \quad (10)$$

On peut alors calculer l'aimantation moyenne pour un électron :

$$\bar{m} = \frac{m_\downarrow e^{-\beta U_\downarrow} + m_\uparrow e^{-\beta U_\uparrow}}{z} = \mu_B \frac{e^{-\beta \mu_B B} - e^{-\beta(-\mu_B B)}}{2 \cosh(\beta \mu_B B)} \quad (11)$$

donc

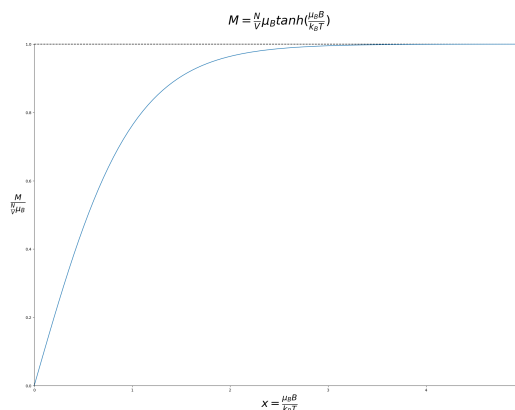
$$\bar{m} = \mu_B \tanh(\beta \mu_B B) \quad (12)$$

Pour  $N$  électrons, on obtient donc

$$Z_N = z^N \quad \text{et} \quad \bar{M} = -\frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{VB} = \frac{1}{VB} \frac{\partial \ln(Z_N)}{\partial \beta} \quad (13)$$

On obtient finalement l'aimantation globale

$$\boxed{\bar{M} = \frac{N}{V} \mu_B \tanh \beta \mu_B B} \quad (14)$$



### Remarque

Ce calcul est en réalité le cas particulier du calcul de la fonction de Brillouin (1932) dans lequel il somme sur tous les spins :

$$z = \sum_{m=-S}^{+S} e^{-\beta \mathcal{M} m B} = e^{\beta g_e S \mu_B B} \frac{1 - e^{\beta g_e \mu_B B (2S+1)}}{1 - e^{-\beta g_e \mu_B B}}$$

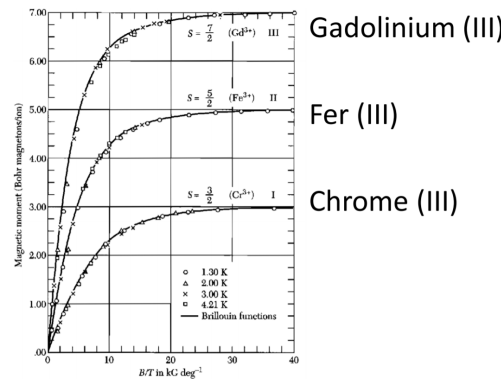
Après

$$z = \frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S} \beta \mu_B B\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S} \beta \mu_B B\right)}$$

Finalement,

$$\overline{M} = -\frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{NVB} = \frac{1}{NVB} \frac{\partial \ln(Z_N)}{\partial \beta} = \dots = \frac{\mu_B}{2SV} \left[ (2S+1) \coth\left(\frac{2S+1}{2S} \beta \mu_B B\right) - \coth\left(\frac{1}{2S} \beta \mu_B B\right) \right]$$

En passant, la limite classique fait apparaître la fonction de Langevin (1905)  $\mathcal{L}(y) = \coth(y) - \frac{1}{y}$  en prenant  $S \rightarrow +\infty$  (donc  $\mu$  continu).



En prenant  $S = \frac{1}{2}$  et en remarquant que  $2 \coth(2x) - \coth(x) = \tanh(x)$ , on retrouve l'expression de  $\overline{M}$  encadrée ci-dessus pour notre modèle.

## 2.3 Interprétation

*Balancer un programme Python ou GéoGébra.*

La première chose à remarquer est qu'en l'absence de champ magnétique extérieur, l'aimantation globale est nulle. On peut le comprendre en se disant que tous les dipôles magnétiques sont orientés aléatoirement quand il n'y a pas de champ magnétique.

On considère maintenant le cas  $\vec{B} \neq \vec{0}$ .

- Il y a une compétition entre l'alignement des dipôles selon les lignes de champ ( $-\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$ ) et l'agitation thermique ( $k_B T = \frac{1}{\beta}$ ), ce qui explique pourquoi le paramagnétisme dépend de la température.
- À fort champ ou à basse température,  $\mu_B B \gg k_B T$  et on a une **saturation** :  $\tanh(x) \xrightarrow{+\infty} 1$  donc

$$\boxed{\overline{M} = \frac{N}{V} \mu_B}$$

Tous les dipôles sont alignés.



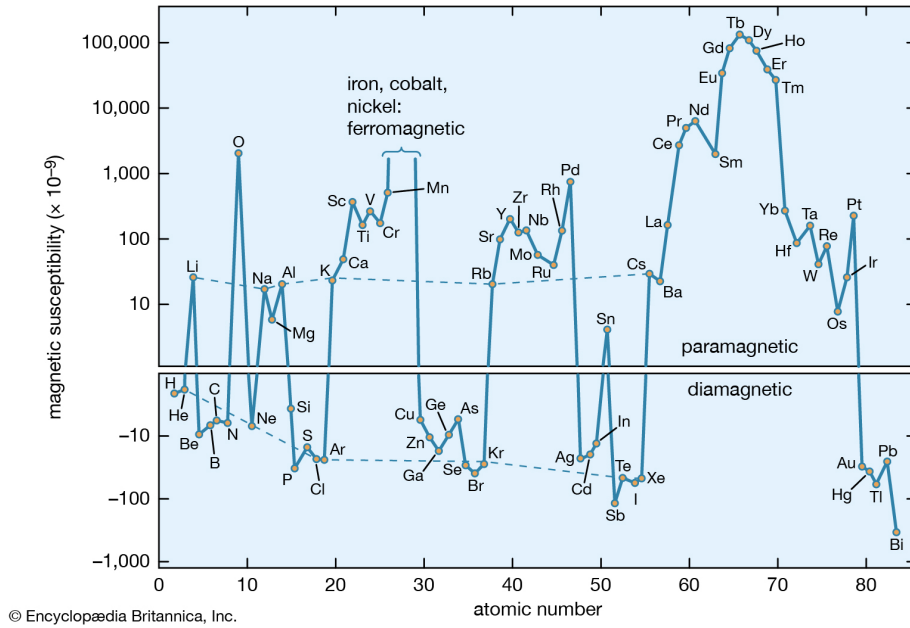
- À faible champ ou à haute température,  $\mu_B B \ll k_B T$  et on peut faire un DL de  $\overline{M}$  en  $\beta\mu_B B$  :

$$\overline{M} = \frac{N \mu_B^2 B}{V k_B T}$$

Or  $B = \mu_0(1 + \chi_m)H \approx \mu_0 H$  car  $\chi_m \ll 1$  donc  $\overline{M} = \frac{N \mu_B^2 \mu_0}{V k_B T} H$ . Or  $\overline{M} = \chi_m H$  donc

$$\chi_m = \frac{N \mu_B^2 \mu_0}{V k_B} \times \frac{1}{T}$$

Pour un gaz,  $\frac{N}{V} \sim 10^{25} \text{ m}^{-3}$  donc  $\chi_m \sim 10^{-7}$  à 300 K.



On retrouve la loi de Curie (1895) :

$$T_c = \frac{N \mu_B^2 \mu_0}{V k_B}$$

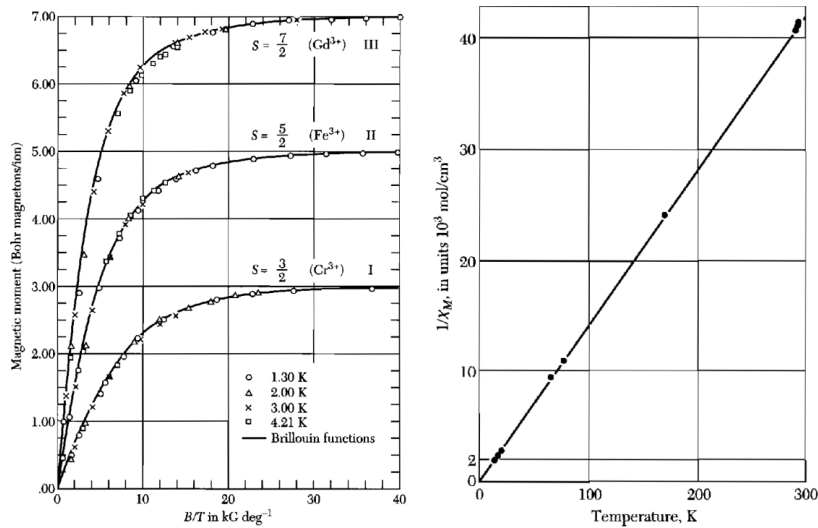


FIGURE 3 – À gauche : Aimantation magnétique par atome en fonction du champ magnétique appliqué  $B_0$  pour différentes températures et pour différents échantillons (alun de chrome, alun de fer et sulfate de Gadolinium octahydrate.). À droite : Évolution de l'inverse de la susceptibilité magnétique en fonction de la température entre 0 et 300 K pour le sel de Gadolinium.

Ces résultats peuvent être généralisés aux atomes de spins plus complexes :

- $\text{Cr}^{3+}$  est dans une configuration  $[\text{Ar}] 3d^3$  donc  $J = |L - S| = \frac{3}{2}$
- $\text{Fe}^{3+}$  est dans une configuration  $[\text{Ar}] 3d^5$  donc  $J = |L - S| = \frac{5}{2}$
- $\text{Gd}^{3+}$  est dans une configuration  $[\text{Xe}] 4f^7$  donc  $J = |L - S| = \frac{7}{2}$

On voit dans la figure 3 la forte concordance entre la théorie et l'expérience.

### 3 Ferromagnétisme

On cherche encore et toujours une équation d'état du type  $M = M(T, B)$ .

#### 3.1 Interactions entre moments magnétiques

⚡ Diu p450

Contrairement au milieu paramagnétique qui peuvent être de natures différentes (liquide, solide), le ferromagnétisme ne se manifeste que dans les milieux solides pour lesquels on ne peut plus négliger les interactions entre les moments magnétiques de différents atomes. Par exemple, le ferromagnétisme se manifeste à température ambiante dans le fer, le cobalt ou encore le nickel. Il résulte d'une interaction entre les spins des atomes voisins, qui permet l'existence d'une aimantation **rémanente**. Cette interaction est donc une interaction d'échange.

On considère deux atomes, situés sur les sites  $i$  et  $j$ , de spins  $\vec{S}_i$  et  $\vec{S}_j$ , tels que :

$$\vec{\mathcal{M}}_i = p\mu_B \vec{S}_i \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_j = p\mu_B \vec{S}_j \quad (15)$$

On introduit l'interaction d'échange de coefficient de couplage  $J_{ij}$  (exprimé en Joules) entre les spins de *voisins immédiats*. Le hamiltonien du système placé dans un champ  $\vec{B}$  uniforme est donc le **hamiltonien d'Heisenberg** :

$$H_{\text{Heis}} = -g\mu_B \vec{B} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{S}_i - J \sum_{\{i,j\}} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad \text{avec } J > 0 \quad (16)$$

#### Remarque

On n'a pas considéré l'interaction dipôle magnétique/dipôle magnétique qui a une énergie  $\frac{\mu_B^3 \mu_0}{d^3} \approx 10^{-22}$  J car  $k_B T \approx 10^{-20}$  : ce couplage est donc détruit par l'agitation thermique.

Regardons cette interaction d'échange de plus près. Pour cela, on considère 2 électrons de fonction d'onde

$$\psi(1, 2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_s(1, 2) \quad (17)$$

avec  $\phi$  la fonction d'onde orbitale et  $\chi_s$  la fonction d'onde de spin. On distingue 2 cas :

- les spins sont parallèles et  $\chi_s(1, 2) = \chi_s(2, 1)$ . On a donc  $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\phi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$  ;
- les spins sont antiparallèles et  $\chi_s(1, 2) = -\chi_s(2, 1)$ . On a donc  $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$

Pour les spins parallèles, la fonction d'onde s'annule lorsque les deux électrons sont au même endroit (d'après le principe d'exclusion de Pauli) alors que des électrons de spins antiparallèles peuvent se trouver au même endroit. Deux électrons de spins parallèles sont donc en moyenne plus éloignés l'un de l'autre que deux électrons de spins antiparallèles, ce qui implique que leur énergie d'interaction coulombienne est plus faible. **La configuration avec des spins parallèles est donc la plus favorable.**

Lorsqu'un matériau ferromagnétique est exposé à un champ magnétique, ses spins s'orientent selon la direction du champ. Lorsque le champ disparaît, l'interaction d'échange entre les spins maintient l'aimantation du matériau.

### 3.2 Approximation du champ moyen

☛ Diu p454

Pour un site  $i$ , on considère l'hamiltonien

$$H_i = -g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{S}_i - J \sum_j \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -g\mu_B \vec{S}_i \cdot \left( \vec{B} + \frac{J}{g\mu_B} \sum_j \vec{S}_j \right) \quad (18)$$

Le champ subit par l'atome au site  $i$  s'écrit donc

$$\vec{B}_i = \vec{B} + \frac{J}{g\mu_B} \sum_{j \text{ voisin de } i} \vec{S}_j \quad (19)$$

où le deuxième terme correspond au champ créé par les atomes voisins de l'atome  $i$ .

En 1907, P. Weiss propose l'**approximation du champ moyen** qui consiste à considérer ce champ moléculaire comme constant et à le remplacer par sa valeur moyenne. On écrit alors

$$\left\langle \sum_{j=1}^p \vec{S}_j \right\rangle = p \langle \vec{S}_i \rangle \quad \text{et} \quad \vec{M} = \frac{N}{V} g\mu_B \langle \vec{S}_i \rangle = ng\mu_B \langle \vec{S}_i \rangle$$

On obtient donc

$$\vec{B}_i \simeq \vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B} + \frac{pJ}{(g\mu_B)^2 n} \vec{M} = \vec{B} + \lambda \vec{M} \quad (20)$$

On voit donc que  $\vec{B}_{\text{eff}}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  sont colinéaires (puisque  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  le sont).

On peut alors remplacer  $\vec{B}$  dans l'expression de  $\vec{M}$  dans la partie sur le paramagnétisme par  $\vec{B}_{\text{eff}}$  et obtenir une équation auto-cohérente :

$$M = \frac{ng\mu_B}{2} \tanh \left( \frac{g\mu_B}{2k_B T} (B + \lambda M) \right) \quad (21)$$

$$\frac{M}{M_\infty} = \tanh \left( \frac{T_c}{T} \frac{M}{M_\infty} + \frac{\mu_B B}{k_B T} \right) \quad (22)$$

en posant  $M_\infty = \frac{ng\mu_B}{2}$  et  $T_c = \lambda \frac{n\mu_B^2}{k_B}$ .

↓  
Pour résoudre cette équation, on a besoin de l'outil numérique. On va aussi comprendre pourquoi on n'a pas tenu compte de cette interaction d'échange dans la partie traitant du paramagnétisme.

### 3.3 Aimantation en champ nul et transition ferromagnétique/paramagnétique

☛ Diu p456

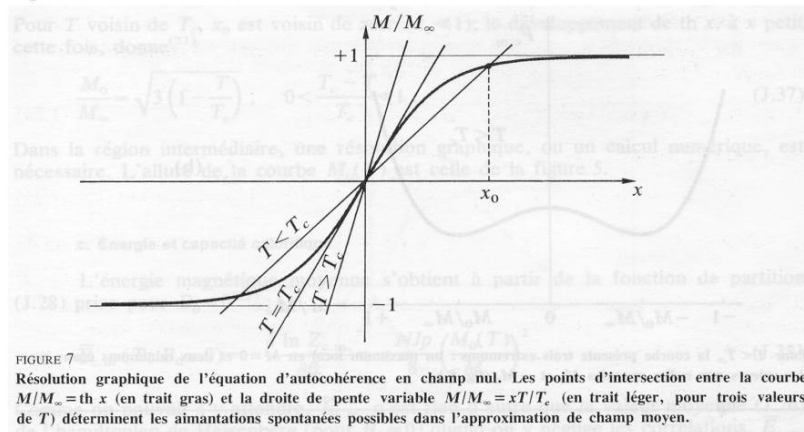


#### Température de Curie d'un clou ou d'une chaîne de trombone

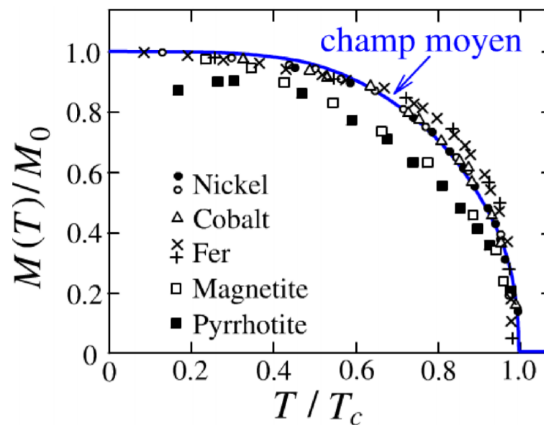


On chauffe et on voit que ça se désaimante. Pro-tip : la chaîne de trombone se chauffe plus rapidement.

L'équation auto-cohérente peut être résolue graphiquement en champ nul ( $B = 0$ , appelé approximation de Bragg-Williams) pour obtenir :



On voit qu'au-dessus d'une certaine température critique, la seule solution de l'équation auto-cohérente est  $M = 0$ . L'interaction d'échange est toujours présente mais l'agitation thermique la domine. Le milieu est alors paramagnétique à ces températures (champ  $B$  nul implique aimantation nulle), et c'est la raison pour laquelle on a ignoré les interactions d'échange dans la partie sur le paramagnétisme. Cependant, si  $T < T_c$ , il existe 2 solutions non-nulles symétriques par rapport à l'origine à l'équation auto-cohérente qui témoignent d'une aimantation rémanente même en l'absence de champ magnétique extérieur : le milieu est alors ferromagnétique.



On appelle **température de Curie** la température critique marquant la transition de phase entre ferromagnétisme et paramagnétisme.

	$T_c$ (K)	$M_\infty$ ( $\times 10^4$ A/m)
Fer (Fe)	1043	14
Cobalt (Co)	1388	11
Nickel (Ni)	627	4
Gadolinium (Gd)	293	16
Dysprosium (Dy)	85	24
Magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )	858	4

L'application d'un champ extérieur ne fait que modifier la symétrie des solutions<sup>2</sup>.

**Remarque**

L'approximation de Bragg-Williams n'est plus vraiment valable au voisinage de  $T_c$  car la transition est du second ordre et donc fait intervenir des exposants critiques.

2. Balancer les animations Python/GéoGébra pour la transition.

## Questions des années précédentes

- Définir précisément le moment magnétique et l'aimantation.  
→ L'aimantation est la densité de moment magnétique i.e.  $\vec{M} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial V}$
- Ordre de grandeur du champ créé par les aimants dans l'expérience du clou ?  
→ 1 T ou plutôt 1 mT? 1 T ça paraît gros...
- Est-ce nécessaire que B soit uniforme pour que le calcul de l'énergie potentielle soit valable ?  
→ Non, seul le moment magnétique doit l'être.
- Maxwell décrit déjà le système, pourquoi on ajoute  $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$  où  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  ?  
→ Pour contraindre le système, Maxwell nous donne 8 équations (3 par équation vectorielle et 1 par équation scalaire) et on a 9 inconnues ( $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ ) d'où cette relation supplémentaire pour fermer le système.
- C'est quoi  $1 + \chi_m$  ?  
→ La permittivité relative  $\epsilon_r$ .
- Pour les diamagnétiques, comment doit être le moment magnétique lorsqu'on plonge dans un champs  $\vec{B}$  ?  
→ Loi de Lenz, l'aimantation s'oppose à  $\vec{B}$ . Pour un diamagnétique, valeur typique de  $\chi_m$  ?  
→ Proportionnelle à la densité, pour  $H_2(g)$  c'est  $-10^{-9}$ , pour des solide est plutôt  $-10^{-7}$
- Et pour les paramagnétiques ?  
→  $10^{-4}$  pour Gadolinium,  $10^{-3}$  pour  $FeCl_3$  et environ 3 ordres de grandeur de moins pour les phases non condensée.
- Pourquoi l'azote liquide ne reste pas confinée dans l'entrefer de l'aimant comme l'oxygène liquide ?  
→ Parce que  $\chi_m$  de l'azote est 3 ordre de grandeur plus faible que l'oxygène et le gradient d'induction magnétique n'est pas suffisant pour contrebalancer le poids.
- Définir précisément le moment magnétique et l'aimantation.  
→ L'aimantation est la densité de moment magnétique i.e.  $\vec{M} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial V}$  ordre de grandeur du champ créé par les aimants dans l'expérience du clou ?  
→ 1T ou plutôt 1mT? 1 T ça paraît gros...
- Est-ce nécessaire que B soit uniforme pour que le calcul de l'énergie potentielle soit valable ?  
→ Non, seul le moment magnétique doit l'être. Maxwell décrit déjà le système, pourquoi on ajoute  $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$  où  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  ?  
→ Pour contraindre le système, Maxwell nous donne 8 équations (3 par équation vectorielle et 1 par équation scalaire) et on a 9 inconnues ( $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ ) d'où cette relation supplémentaire pour fermer le système. c'est quoi  $1 + \chi_m$  ?  
→ La permittivité relative  $\epsilon_r$ .
- Pour les diamagnétiques, comment doit être le moment magnétique lorsqu'on plonge dans un champs  $\vec{B}$  ?  
→ Loi de Lenz, l'aimantation s'oppose à  $\vec{B}$ .
- Pour un diamagnétique, valeur typique de  $\chi_m$  ?  
→ Proportionnelle à la densité, pour  $H_2(g)$  c'est  $-10^{-9}$ , pour des solide est plutôt  $-10^{-7}$
- Et pour les paramagnétiques ?  
→  $10^{-4}$  pour Gadolinium,  $10^{-3}$  pour  $FeCl_3$  et environ 3 ordres de grandeur de moins pour les phases non condensée.
- Pourquoi l'azote liquide ne reste pas confinée dans l'entrefer de l'aimant comme l'oxygène liquide ?  
→ Parce que  $\chi_m$  de l'azote est 3 ordre de grandeur plus faible que l'oxygène et le gradient d'induction magnétique n'est pas suffisant pour contrebalancer le poids.
- Pourquoi le clou est-il attiré par l'aimant ?  
→ Parce qu'il a une énorme susceptibilité magnétique et non parce qu'il a une aimantation rémanente.
- Dans la description microscopique, pourquoi  $L = 0$  ?  
→ C'est la valeur propre du moment cinétique orbitalaire dans le cas où les électrons on remplit une couche.

- Pourquoi se place-t-on à l'équilibre thermodynamique ?  
→ Pour décrire la probabilité d'être dans un certain niveau d'énergie grâce à la loi de Boltzmann et pour décrire la physique à l'équilibre des matériaux.
- Pour quels éléments ce modèle est-il pertinent ?  
→ Pour ceux qui ont un unique électron célibataire, c'est-à-dire les alcalins. - Qu'est-ce que l'approximation du champ moyen ?  
→ C'est de dire que

$$J \sum_{i,j} \vec{J}_i \cdot \vec{J}_j \simeq \sum_i \left( J \sum_{j \in PPV} \vec{J}_j \right) \cdot \vec{J}_i$$

Hypothèse : la somme n'est pas étendue sur tout le volume mais peut se restreindre aux Plus Proche Voisins pour lesquels il existe une aimantation moyenne non nulle.

- Pourquoi y-a-t-il une aimantation non nulle à température  $T < T_c$  ?  
→ L'état d'aimantation nulle lorsque  $T < T_c$  n'est pas le plus bas en énergie donc il n'est pas stable.
- Pourquoi y-a-t-il une aimantation non nulle à température  $T < T_c$  ?  
→ L'état d'aimantation nulle lorsque  $T < T_c$  n'est pas le plus bas en énergie donc il n'est pas stable.
- Comment obtient-on le graphe en chapeau mexicain de E en fonction de M ?  
→ Il faut exprimer l'énergie en fonction de l'aimantation, et ne pas faire l'approximation du champ moyen, pour ne plus négliger les corrélations entre les spins. Donc les S se ré-écrivent comme  $S_{\text{moyen}} + S_{\text{fluctuation}}$ . Il existe trois valeurs d'équilibre pour l'aimantation, dont deux sont favorisées lorsque  $T < T_c$ . En augmentant le champ extérieur, on déplace un puits vers le haut et l'autre vers le bas et donc on favorise ce second puits comme valeur d'aimantation à l'équilibre, brisant ainsi la symétrie du système.
- A la température critique, en quoi ce système est-il particulier ?  
→ Il subit une transition de phase et l'échelle caractéristique de corrélation entre spins diverge. C'est une conséquence de l'invariance d'échelle. Les fluctuations ne s'atténuent plus sur une distance exponentielle, mais selon des lois de puissances générales (exposants critiques).
- Comme justifier la valeur de  $g = 2$  l'oxygène ?  
→ Le spin électronique total est  $S = 1$  car, selon la règle de Hund, les spins sont alignés. De plus, la couche électronique est remplie, donc  $L = 0$ . Ainsi,  $J = S = 1$  et  $g = 2$