LP – Électrocinétique de tes morts

31 mars 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L2 (PCSI-MP)

Bibliographie

✍ *Electrocinétique* **H-Prépa**
✍ *Souvenirs du temps jadis*

Prérequis

- ➢ Base d'électricité
- ➢ Notation complexe
- ➢ Lois des mailles et des noeuds
- ➢ Régime sinusoïdal forcé

Expériences

- ☕ Tracé d'un Bode
- ☕ Atténuation
- ☕ Débruiter un signal

Table des matières

Introduction

L'électrocinétique, au delà de développer un cadre mathématique universellement intéressant, a des applications directes en électronique et en physique. Cette leçon a pour but de remettre le formalisme en contexte et de l'appliquer aux premiers exemples de filtrage linéaire.

1 Impédance complexe

L'impédance est la première notion à définir lorsque l'on parle d'électrocinétique. "C Kwa ?" demanda le petit Timéo de ses grands morts du fond de la classe.

Au cours de toute cette section, on se place en convention récepteur (**image**), et on nomme u la tension aux bornes des dipôles considérés et i l'intensité les traversant.

1.1 Définition générale

Un dipôle linéaire est caractérisé par le lien qui unit la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Pour une résistance, on nomme ce lien la... La résistance, oui, bravo Timéo. Le lien s'exprime sous la forme :

$$u = Ri \tag{1}$$

Or on a vu (prérequis) que les équations qui régissent un condensateur ou une bobine parfaites (une capacité et une inductence) sont des équations différentielles.

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_c}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

Si on se place en régime sinusoïdal forcé, ces équations deviennent, en notation complexe :

$$\underline{i_c} = jC\omega\underline{u_C} \qquad \underline{u_L} = jL\omega\underline{i_L} \tag{3}$$

On peut alors simplifier le lien qui unit tension et intensité :

$$\underline{u_c} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i_C} \qquad \underline{u_L} = jL\omega\underline{i_L} \tag{4}$$

Par analogie avec la résistance, on définit des résistance complexes, des *impédences*. On les notes traditionnellement $\underline{Z}$.

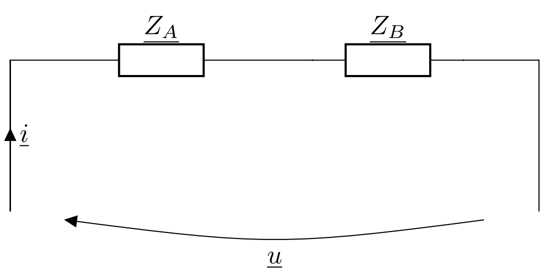
$$\underline{Z_R} = R \qquad \underline{Z_L} = jL\omega \qquad \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} \tag{5}$$

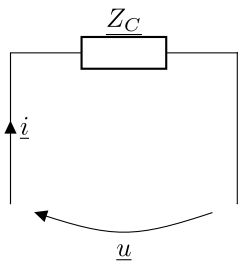
1.2 Impédance équivalente

Ces impédances obéissent aux mêmes lois que les résistances, puisque ce ne sont rien d'autres que des résistances complexes. Nous allons rapidement redémontrer les lois d'équivalences.

1.2.1 Série

Supposons que l'on a 2 dipôles en série, d'impédances $\underline{Z_A}$ et $\underline{Z_B}$. Alors on a le schéma suivant





On peut écrire

$$\underline{i_A} = \underline{i_B} = \underline{i_C} \qquad \underline{u_A} + \underline{u_B} = \underline{u_C} \tag{6}$$

Or on a $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, d'où

$$\underline{u_C} = (\underline{Z_A} + \underline{Z_B})\underline{i_C} \tag{7}$$

On retrouve la loi qu'en série, les Impédances s'additionnent.

1.2.2 Parallèle

Même chose en parallèle, on trouve immédiatement :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z_A}} + \frac{1}{\underline{Z_B}}} \tag{8}$$

Les lois usuelles sont donc alors toutes valides, mais en complexe !

2 Rappels

2.1 Lois de Kirschoff

Les lois de Kirschoff sont toujours valides en notation complexes. Ainsi, les 2 lois suivantes sont toujours respectées :

- **Loi des noeuds :** la charge électrique ne peut pas s'accumuler aux noeuds d'un circuit (conséquence de l'ARQS). Ainsi, **la somme des courants arrivant sur un noeud est égale à la somme des courants qui en repartent** :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{i}_k = 0 \tag{9}$$

  où ϵ_k vaut 1 si le courant arrive sur le noeud et -1 si le courant en repart.

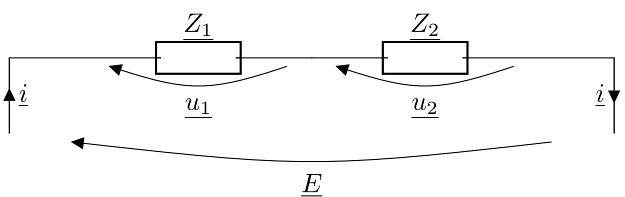
- **Loi des mailles :** les tensions sont additives, si bien que $\underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC} = \underline{u}_{AC}$. Pour une maille composée de n dipôles, on a donc $\underline{u}_{A_1A_2} + \cdots + \underline{u}_{A_nA_{n+1}} + \underline{u}_{A_{n+1}A_1} = \underline{u}_{A_1A_1} = 0$. Ainsi, **la somme des tensions (orientées dans le même sens) le long d'une maille orientée est nulle** :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u}_k = 0 \tag{10}$$

  où ϵ_k vaut 1 si la tension est orientée dans le sens de la maille et -1 sinon.

2.2 Ponts diviseurs

2.2.1 Pont diviseur de tension



On veut calculer la tension $\underline{u_1}$ aux bornes du dipôle d'impédance $\underline{Z_1}$ en connaissant la tension $\underline{E}$ aux bornes de deux dipôles en série. Pour cela, on écrit la loi des mailles :

$$\underline{E} = \underline{u_1} + \underline{u_2} \tag{11}$$

On veut ensuite éliminer $\underline{u_2}$. Pour cela, on utilise deux fois la définition de l'impédance :

$$\underline{u_2} = \underline{Z_2}\,\underline{i} = \underline{Z_2}\frac{\underline{u_1}}{\underline{Z_1}} \tag{12}$$

On obtient donc

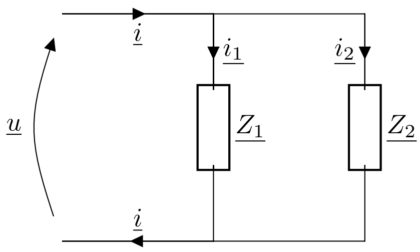
$$\underline{E} = \underline{u_1} + \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}\underline{u_1} \tag{13}$$

Finalement, on peut écrire la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{E}} \tag{14}$$

Ainsi, on utilisant des impédances équivalents, on peut se ramener au schéma électrique ci-dessus et donc appliquer cette formule. Il faut cependant faire attention à ne pas avoir de branche connectée avant ou après les dipôles.

2.2.2 Pont diviseur de courant



On veut calculer l'intensité $\underline{i_1}$ traversant le dipôle d'impédance $\underline{Z_1}$ en connaissant l'intensité $\underline{i}$ qui sera répartie entre les dipôles en parallèle. Pour cela, on utilise la loi des noeuds :

$$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} \tag{15}$$

On veut ensuite éliminer $\underline{i_2}$. Pour cela, on utilise deux fois la définition de l'impédance :

$$\underline{i_2} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_2}} = \frac{\underline{Z_1}\,\underline{u}}{\underline{Z_2}} \tag{16}$$

On obtient donc

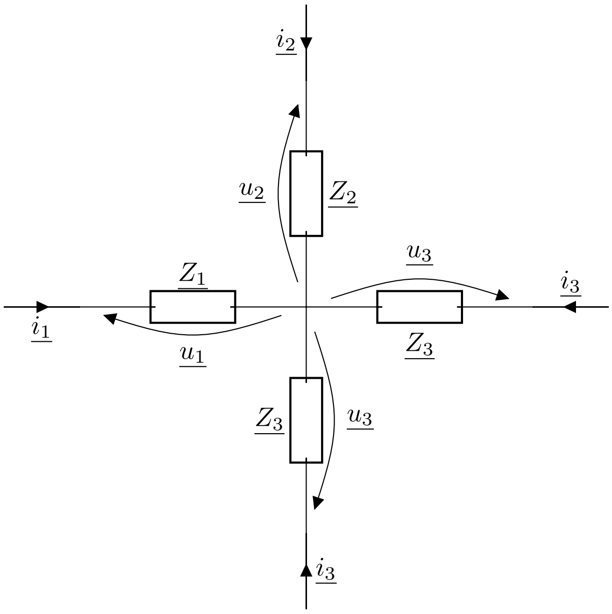
$$\underline{i} = \underline{i_1} + \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\underline{i_1} \tag{17}$$

Finalement, on peut écrire la formule du pont diviseur de courant :

$$\boxed{\underline{i_1} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{i}} \tag{18}$$

Ainsi, on utilisant des impédances équivalents, on peut se ramener au schéma électrique ci-dessus et donc appliquer cette formule. Il faut cependant faire attention à ne pas avoir de branche connectée avant ou après les dipôles.

2.3 Théorème de Millman



Prenons un noeud sur lequel sont branchés 4 dipôles d'impédance $\underline{Z_k}$. Notons $\underline{V_{\text{noeud}}}$ le potentiel du noeud et $\underline{V_k}$ le potentiel au bout de la branche k. La tension aux bornes du dipôle de la branche k est $\underline{u_k} = \underline{V_k} - \underline{V_{\text{noeud}}}$ Chaque branche est k est parcourue par une intensité $\underline{i_k}$.
On applique la loi des noeuds :

$$\sum_k \underline{i_k} = 0$$

Ici, on a orienté l'intensité vers le noeud pour chaque branche, ce qui n'a aucun sens physique, mais cela importe peu car les signes dû à l'orientation de $\underline{i_k}$ se compensent avec les signes dûs à la convention récepteur/générateur prise à chaque dipôle, si bien que mathématiquement on peut choisir tous les $\underline{i_k}$ allant vers le noeud.

Par définition de l'impédance, on a donc

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\underline{u_k}}{\underline{Z_k}} &= 0 \\ \sum_k \frac{\underline{V_k} - \underline{V_{\text{noeud}}}}{\underline{Z_k}} &= 0 \\ \sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} &= \sum_k \frac{\underline{V_{\text{noeud}}}}{\underline{Z_k}} \\ \sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} &= \underline{V_{\text{noeud}}} \sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}} \end{aligned} \tag{19}$$

Finalement, en notant $\underline{G_k} = \frac{1}{\underline{Z_k}}$ la conductance complexe du dipôle k, on obtient le théorème de Millman :

$$\boxed{\underline{V_{\text{noeud}}} = \frac{\sum_k \underline{G_k}\underline{V_k}}{\sum_k \underline{G_k}}} \tag{20}$$

3 Fonction de transfert

Grâce à ces théorèmes, on peut définir une impédance équivalente pour des circuits très complexes, d'ordre 1 ou deux (donc différentiels). La notion d'impédance laisse alors place à celle de fonction de transfert.

3.1 Définition

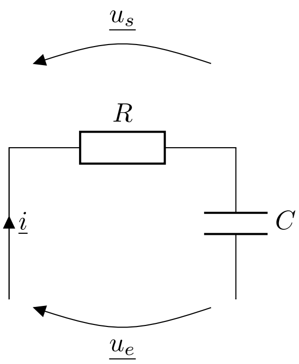
En toute généralité une fonction de transfert est le rapport entre une quantité considérée comme la sortie d'un système et une quantité considérée comme l'entrée. On la note $\underline{H}$, et si on nomme l'entrée $\underline{e}$ et la sortie $\underline{s}$ on a :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \tag{21}$$

L'impédance d'un dipôle n'est alors qu'un cas particulier de fonction de transfert ou l'entrée et la sortie sont respectivement le courant et la tension aux bornes du dipôle.

On peut alors définir des fonctions de transfert pour des circuits électrique. Supposons que l'on impose une tension complexe aux bornes d'un circuit RC série, on peut définir comme entrée cette tension, et comme sortie la tensio aux bornes de la résistance.

3.2 RC série



Alors un pont diviseur de tension donne directement

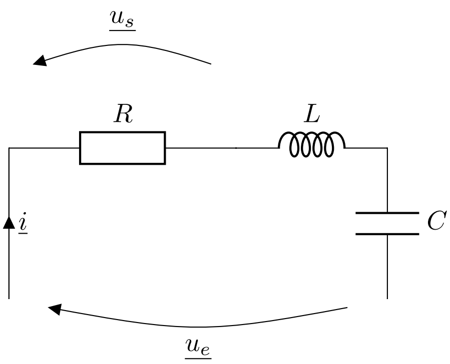
$$\underline{u_s} = \frac{R}{R + \underline{Z_C}}\underline{u_e} \tag{22}$$

Soit encore en remplaçant l'impédance du condensateur :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \tag{23}$$

3.3 RLC série

Pour un circuit RLC série ce n'est pas beaucoup plus vache, on fait les calculs en live au tableau et on est content.



$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \tag{24}$$

3.4 Remonter à l'équation différentielle

Ça on l'a vu, mais on va le refaire un peu :

$$\underline{s} = \underline{He} \Rightarrow RC\dot{u}_e = u_s + RC\dot{u}_s + LC\ddot{u}_s \tag{25}$$

Et on va pas se mentir, la formulation en impédance elle est vachement plus facile.

4 Filtrage

Cette notion de fonction de transfert va nous permettre de faire ce que l'on appelle du filtrage.

4.1 Effet d'une fonction de transfert sur un sinus

Si on prend un signal sinusoïdal en entrée d'une fonction de transfert, celle-ci étant, à ω fixé, un simple nombre complexe, on peut écrire que u_s sera simplement la multiplication par un nombre complexe de u_e. Ainsi on définit le gain et la phase de H comme le module et la phase de ce nombre.

(Montrer des exemples de courbe de gain)

☕

Courbes de gain :
On met un sinus à des fréquences différentes en entrée d'un filtre RLC série avec résonance, et on trace le diagramme de bode (mais on l'appelle pas comme ça pour le moment).

4.2 Notion de filtrage

Lorsque l'on étudie un signal, on peut le décomposer comme une somme de signal sinusoïdaux de pulsations fixées. Un signal carré par exemple est une superposition infinie de signaux sinus :

$$x_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)2\pi f t\right)}{(2k+1)} \tag{26}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(2\pi f t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f t) + \frac{1}{5}\sin(10\pi f t) + \cdots\right). \tag{27}$$

On peut s'amuser à calculer ce qu'il arrive à un créneau dans un RC série !

☕

Entendre le filtrage
On met un créneau en entrée d'un RC série amplifié. On branche sur un HP, et on visualise en même temps.

On voit que le signal est déformé, parce que chacun de ses cosinus est affecté différement par le système. (Faire le calcul du gain)

Quand $\omega < \omega_0$, on est pas affecté. Si $\omega > \omega_0$, le signal est atténué. On dit que l'on effectue un *filtrage passe-bas*.

4.3 Diagramme de Bode

Si on a le temps.
C'est le gain en dB et la phase, en fonction de $\log(\omega)$.
Une représentation pratique, qui montre tout de suite l'effet du filtre.
faire un dessin d'un passe bas et des harmoniques du carré.

4.4 Utilisation dans la vraie vie

☕

nettoyer un signal bruité

✍ ⏲

On prend un signal que l'on bruite et que l'on écoute au HP. On passe dans un passe bas d'ordre 2 avec Q=1 et pouf !