Élasticité et déformations

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *Theory of elasticity*, **Landau**	⟶	
✍ *The Feynman lectures on physics 2, mainly electromagnetism and matter*, **Feynman, Leyton, Sands**	⟶	À partir du chap 38
✍ https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_à_l'élasticité	⟶	Wikipédia sauve encore la mise !
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Hooke	⟶	Exemples
✍ clement.de-la-salle	⟶	On les aimes nos cléments <3
✍ *Introduction to seismology*, **Stein**	⟶	Réflexion/transmission ondes élastiques

Prérequis

➢ Mécanique du point

➢ Mécanique des fluides

Table des matières

Introduction

L'étude que nous allons faire est, comme dans le cas du ressort, celle des petites déformations. En effet si on prend un ressort, ou une poutre, et qu'on la tord au delà de son domaine de réversibilité, elle se détruit, on parle d'élasticité entropique.

On se concentre ici sur l'élasticité linéaire, celle qui est réversible, et qui se fait aux faibles déformations. Les milieux que l'on considère sont homogènes et isotropes, ce qui signifie qu'à l'échelle d'un cristal (par éxemple métallique), on se place au delà de la longueur de cohérence de la maille.

1 Loi fondamentale : loi de Hooke

1.1 Noter la déformation

On doit définir les grandeurs que l'on étudie. Si on prend un parallélépipède et qu'on exerce une force $\overrightarrow{F}$ sur deux de ses surfaces opposées S , par exemple une compression par une presse hydraulique, on applique une contrainte. Cette contrainte est une pression, c'est à dire une.. ? Force surfacique ! Oui Timéo, bravo !

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ est la contrainte subie par le matériaux.} \tag{1}$$

On observe alors une déformation, c'est à dire un changement relatif de longueur.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ est la déformation du matériaux.} \tag{2}$$

Maintenant on veut une loi pour relier ces deux valeurs, de la même manière qu'on a une loi pour les ressort qui relient leur élongation à la force exercée.

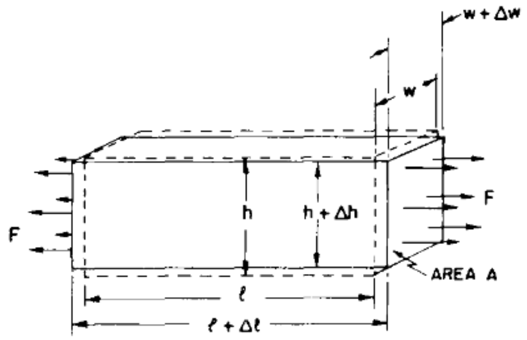


Figure 1 – Schématisation de la situation.

1.2 Loi empirique de Hooke

On suppose que l'on applique une contrainte σ_x sur la direction x, et on veut la relier aux déformation ε_i sur chaque direction $\{x_i\} = \{x, y, z\}$.

Loi **Empirique** de Hooke :

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x & \text{avec } E \text{ le } \textbf{module d'Young} \text{ du matériaux.} \\ \varepsilon_{y,z} = -\nu\varepsilon_x & \text{avec } \nu \text{ le } \textbf{coefficient de Poisson} \text{ du matériaux.} \end{cases} \quad (3)$$

On remarque que cette loi est **linéaire**, on pourra donc appliquer le théorème de superposition, et on ne va pas s'en priver !

Le module d'Young E est proportionnel à une pression, et il est dans le cas des solides de l'ordre de quelques GPa. On verra plus tard que la vitesse du son dans un matériaux est en $\sqrt{E/\rho}$.

Pour ce qui est du coefficient de Poisson, on s'attend instinctivement à ce qu'il soit positif, parce que quand on compresse dans une direction, on dilate dans l'autre. Cependant il exite des matériaux, dit *métamatériaux*, qui ont un $\nu < 0$. En général, $-1 \leq \nu \leq 1/2$. Le cas limite à $\nu = 1/2$ correspond aux matériaux incompressibles.

Exemple : section 4.1, on traite le cas de la pression uniforme.

1.3 Cisaillement

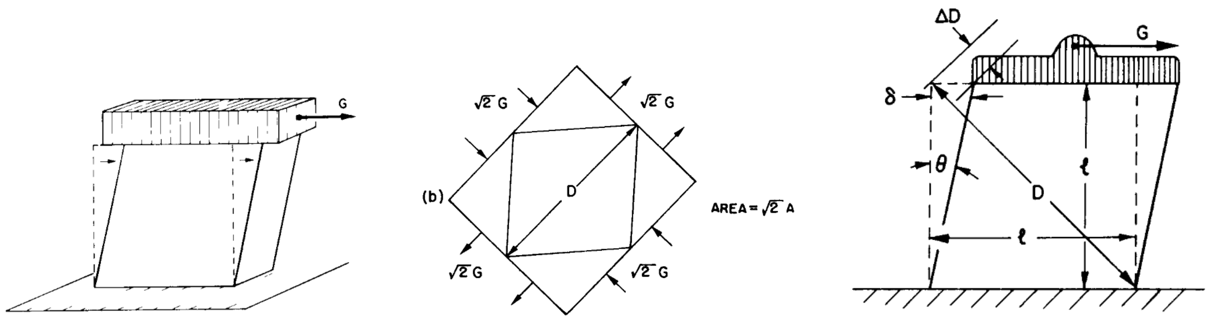


Figure 2 – Un cube sous cisaillement uniforme.

On considère maintenant une force $\overrightarrow{F}$ cisaillante, qui fait faire un angle θ à l'arrête du cube. Si on regarde d'un point de vue géométrique cela revient à appliquer une force de compression $\sqrt{2}F$ sur une diagonale et $-\sqrt{2}F$ sur l'autre. On pose alors x' et y' les nouveaux axes, pris sur les diagonales, et on a alors :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\sqrt{2}F}{ES'} \quad (4)$$

Ainsi un petit théorème de superposition sur les deux effets considérés plus haut donne :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\sqrt{2}F}{S'} = \frac{\Delta D}{D} \quad \text{où } D \text{ est la diagonale} \quad (5)$$

Or un peu de géométrie au premier ordre donne que $\theta = 2\dfrac{\Delta D}{D}$, et finalement avec $S' = \sqrt{2}S$ on obtient :

$$\frac{F}{S} = \frac{E}{2(1+\nu)}\theta = G\theta \quad (6)$$

On nomme $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement du matériaux. On le nomme aussi deuxième coefficient de Lamé, μ.

2 Formalisme tensoriel

Dans la vérité vraie des choses véritables, on utilise des outils puissants et efficaces [1], le tenseur des contrainte et le tenseur des déformations. Ces deux tenseurs sont des matrices qui permettent de limiter le calcul.

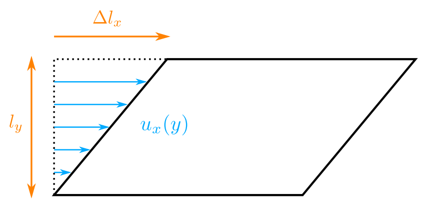
2.1 Tenseur des déformations

Considérons un point quelconque du solide, repéré par sa position $\overrightarrow{r}$ et regardons son déplacement sous l'effet d'une déformation longitudinale homogène. La nouvelle position de ce point après le déplacement est notée $\overrightarrow{r}'$.

On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r}' - \overrightarrow{r}$ le vecteur déplacement du point. On a alors, si la déformation est simplement un étirement uniforme dans la direction x, c'est à dire si on se place à échelle suffisament petite pour considérer qu'elle l'est :

$$u_x = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_x} x = \varepsilon_{xx} x \tag{7}$$

Ainsi $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$. Dans les autres directions, on a le même résultat ($i.e.$ $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$ et $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$), mais il faut aussi ajouter les cisaillements !

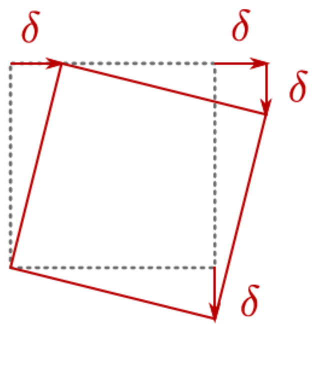


Pour un cisaillement uniforme on a

$$u_x = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_y} y = \varepsilon_{xy} y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{8}$$

Remarque

On peut être tenté d'écrire directement $\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ par analogie avec ce qu'on vient de faire. Cependant, cette formule n'est en réalité pas la bonne : par exemple une rotation ($i.e.$ la superposition d'un petit cisaillement $\Delta \ell_x = +\delta$ et d'un autre petit cisaillement $\Delta \ell_y = -\delta$) n'induit pas de déformation mais pourtant on aurait $\varepsilon_{xy} \neq 0$ avec cette formule.



Ainsi, en prenant l'expression générale proposée au dessus, cohérente avec celle de ε_{ii}, on obtient l'expression du **tenseur des déformations** :

1. *"Propres"*, comme dirait Dirty Gadget.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{9}$$

Notons d'ailleurs que ce tenseur est symétrique.

2.2 La vraie loi de Hooke

On a alors en tenseurs :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}\,\overline{\overline{\varepsilon}} \quad i.e. \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{10}$$

Nous nous proposons de ne pas détailler le calcul des coefficients C_{ijkl}, cependant ils sont très liés, et il est possible de retrouver avec beaucoup de travail :

Loi de Hooke tensorielle

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}\right) \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij} \end{cases} \tag{11}$$

3 Ondes élastiques

✍ Feynmann chap 39

Pour l'instant, on s'est intéressé au solide élastique en équilibre pour lequel les contraintes internes s'ajustent pour obtenir un état d'énergie minimale. Cependant, on va maintenant regarder le cas où ces forces internes ne sont pas à l'équilibre.

3.1 Mise en équation

Pour cela, on considère un volume V de matériau qui est délimité par une surface A. Si ce volume est à l'équilibre, alors la force $\overrightarrow{F}$ totale qui est exercée sur ce volume est nulle. Cette force peut être décomposée en deux parties :

- une force totale extérieure $\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iiint_V \overrightarrow{f_{\text{ext}}}\mathrm{d}V$ qui s'exerce sur le volume (par exemple la gravité)
- une force totale intérieure $\overrightarrow{F_{\text{int}}}$ qui s'exerce sur la surface A du volume par la matière voisine

À l'équilibre, ces forces se compensent. Cependant, hors équilibre (par exemple si le volume bouge), le PFD donne

$$\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \overrightarrow{F_{\text{int}}} = \iiint_V \rho\ddot{\overrightarrow{r}}\mathrm{d}V \tag{12}$$

On obtient alors que

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = -\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \iiint_V \rho\ddot{\overrightarrow{r}}\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\rho\ddot{\overrightarrow{r}} - \overrightarrow{f_{\text{ext}}}\right)\mathrm{d}V = \iiint_V \overrightarrow{f}\mathrm{d}V \tag{13}$$

La force volumique $\overrightarrow{f}$ peut être reliée aux contraintes subies par le volume via la loi de Hooke tensorielle :

$$\overrightarrow{f} = \operatorname{div}\overline{\overline{\sigma}}$$

On peut donc écrire la résultante des forces internes comme

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = \iiint_V \operatorname{div}\overline{\overline{\sigma}}\mathrm{d}V = \oiint_A \overline{\overline{\sigma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{14}$$

et on a également

$$\rho \ddot{\vec{r}} - \overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \text{div } \overline{\overline{\sigma}} \iff \forall \; i \in \{x, y, z\}, \; \rho \ddot{r}_i = \partial_k \sigma_{ki} + f_i^{\text{ext}} \tag{15}$$

Remarque

Si on considère un volume immobile (ou on translation rectiligne uniforme), on obtient

$$\text{div } \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f_{\text{ext}}} = 0 \iff \forall \; i \in \{x, y, z\}, \; \partial_k \sigma_{ki} + f_i^{\text{ext}} = 0 \tag{16}$$

Tâchons maintenant de calculer $\partial_k \sigma_{ki}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ki} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ki} \right) \\ \Rightarrow \partial_k \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\partial_k \varepsilon_{ki} + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_i \varepsilon_{ll} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

On sait cependant que les composantes du tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ s'expriment en fonction du vecteur déformation $\vec{u}$ par l'expression

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2} \left(\partial_k u_i + \partial_i u_k \right) \tag{18}$$

On a donc

$$\begin{cases} \partial_k \varepsilon_{ki} = \dfrac{1}{2} \left[\partial_k \partial_k u_i + \partial_i (\partial_k u_k) \right] \\ \partial_i \varepsilon_{ll} = \partial_i \partial_l u_l \end{cases} \tag{19}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} \left[\partial_k \partial_k u_i + \partial_i (\partial_k u_k) \right] + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_i \partial_l u_l \right] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \right) \partial_i (\partial_k u_k) + \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2} \partial_k \partial_k u_i \end{aligned} \tag{20}$$

En notation vectorielle, cette équation équivaut à

$$\text{div } \overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{u} \right) \tag{21}$$

On peut alors réécrire le PFD en notant que $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{u}}$ et en prenant $\overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \vec{0}$ pour obtenir

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \vec{u} + \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right)} \tag{22}$$

3.2 Apparition des ondes

On a obtenu une équation qui n'est pas sans rappeler une équation d'onde mais qui comporte un terme en plus qui complique les choses. Pour un matériau dont les propriétés élastiques sont partout les mêmes, on peut décomposer les solutions de l'équation 22 (comme n'importe quel autre vecteur en passant) en la somme d'un vecteur de divergence nulle et un autre vecteur de rotationnel nul. On écrit alors

$$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u_1} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{u_2} = \vec{0} \end{cases} \tag{23}$$

En injectant cette expression dans l'équation 22, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{u_1} + \vec{u_2} \right) = \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \left(\vec{u_1} + \vec{u_2} \right) + \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u_2} \right) \tag{24}$$

En prenant la divergence de cette équation et en interchangeant l'opérateur divergence avec l'opérateur laplacien, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial^2 \vec{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \Delta \vec{u_2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \vec{u_2} \right] &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial^2 \vec{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{\nabla} \vec{u_2} \right] &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Or on sait que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$ donc le rotationnel de ce qu'il y a entre crochets est nul. Ainsi, ce qu'il y a entre crochets est à la fois de divergence nulle **et** de rotationnel nul, donc ce terme est forcément nul :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u_2} = 0 \tag{26}$$

On tombe cette fois sur une vraie équation d'onde avec une vitesse $c_p = \sqrt{\dfrac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$. On a obtenue cette équation pour une déformation $\overrightarrow{u_2}$ qui par définition a un rotationnel nul et qui n'est donc pas associée à un cisaillement. Il s'agit alors d'une **onde de compression** (onde acoustique, onde longitudinale, onde P).

Quid du terme $\overrightarrow{u_1}$? Pour ce terme, on prend le rotationnel de l'équation 22 pour obtenir l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_1}}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u_1} = 0 \tag{27}$$

Cette équation décrit quand à elle des ondes se propageant à la vitesse $c_s = \sqrt{\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}}$. Puisque cette équation a été obtenue pour une déformation $\overrightarrow{u_1}$ de divergence nulle, on en déduit que cette déformation n'induit pas de variation dans la densité du matériau. Il s'agit alors d'une **onde de cisaillement** (onde transverse, onde S).

Remarque

Puisque toute déformation $\overrightarrow{u}$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, on peut en déduire que toute onde élastique est une superposition d'une onde longitudinale et d'une onde transverse.

3.3 Réflexion et transmission d'ondes élastiques

✍ Stein

Les ondes élastiques sont, comme toute autre onde, sujettes à la réflexion et à la réfraction au passage d'un dioptre. Dans le cas le plus simple avec une incidence normale au dioptre, l'onde élastique ne change pas de nature : une onde incidente purement longitudinale donne une onde transmise purement longitudinale et de même pour une onde purement transverse.
Cependant, les choses se compliquent quand on n'est plus en incidence normale : alors toute onde incidente va donner une onde longitudinale réfléchie et onde transverse réfléchie ainsi qu'une onde longitudinale transmise et onde transverse transmise.

Mettons ça en équation. On considère une onde élastique se propageant selon l'axe des x et on suppose qu'il y a un dioptre entre un milieu 1 et un milieu 2 dans le plan $x = 0$. On note θ_i l'angle que forme le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i}$ de l'onde incidente avec la normale au dioptre, et on fait de même pour l'onde réfléchie et l'onde transmise. Les 3 ondes s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{u_{i,0}} e^{j(\omega_i t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{r,0}} e^{j(\omega_r t - \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{t,0}} e^{j(\omega_t t - \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{r})} \end{cases} \tag{28}$$

À tout instant t et en tout point de l'interface $x = 0$, on peut écrire la continuité du champs des déformations comme

$$\overrightarrow{u_{i,0}} e^{j(\omega_i t - k_{i,y} y)} + \overrightarrow{u_{r,0}} e^{j(\omega_r t - k_{r,y} y)} = \overrightarrow{u_{t,0}} e^{j(\omega_t t - k_{i,y} y)} \qquad \forall t, \forall y \tag{29}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ k_{i,y} = k_{r,y} = k_{t,y} \end{cases} \tag{30}$$

La deuxième inégalité est très intéressante puisqu'elle donne que $k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$. En divisant par les pulsations, on obtient

$$\frac{k_i}{\omega_i} \sin\theta_i = \frac{k_r}{\omega_r} \sin\theta_r = \frac{k_t}{\omega_t} \sin\theta_t \tag{31}$$

On obtient alors la loi de Snell pour un milieu élastique :

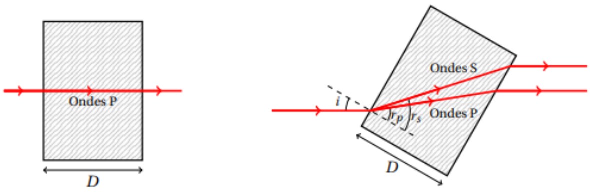
$$\boxed{\frac{\sin\theta_i}{c_i} = \frac{\sin\theta_r}{c_r} = \frac{\sin\theta_t}{c_t}} \tag{32}$$

Cette relation s'applique sur les ondes longitudinales et transverses, et puisque ces ondes ont des vitesses différentes elles auront des angles différents par rapport à la normale. On comprend donc pourquoi une onde incidente donne deux ondes réfléchies et deux ondes transmises.

3.4 Expérience : le dural

✍ voir le MP30 - Acoustique

Avec la manip sur le dural, on distingue bien les 2 ondes.



4 Exemples

4.1 Solide sous pression homogène : compressibilité

On considère un solide sous pressions hydrostatique, c'est à dire une pression P orthogonales à toutes ses surfaces.

Ainsi sur une direction, disons x, on a

$$\begin{cases} -P = \sigma_x = E\varepsilon_x^{\sigma_x} \\ \dfrac{\nu}{E}P = \varepsilon_y^{\sigma_x} = \varepsilon_z^{\sigma_x} \end{cases} \tag{33}$$

Or on a une contribution sur chaque face, et en sommant on obtient

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{2\nu - 1}{E}P \tag{34}$$

Ainsi pour les volumes on a

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -3(1-2\nu)\frac{P}{E} \tag{35}$$

On nomme alors $\kappa = 3(1-2\nu)$ la compressibilité du matériaux, et $\dfrac{1}{\kappa}$ le module de compressibilité isostatique.

4.2 Cas général du ressort

Pour des petites déformations (*i.e.* tant qu'elles sont linéaires), la variation de longueur $\Delta\ell$ d'un ressort en traction/compression est proportionnelle à la force F de traction/compression générée par le ressort. On appelle le coefficient de proportionnalité la **raideur** du ressort, exprimée en N/m et notée k. On a alors

$$F = -k\Delta\ell$$

Le signe "-" indique que cette force s'oppose à toute déformation du ressort.

On peut également définir la raideur k d'un matériau pour d'autres types de déformations :

- $F = k_f\theta$ pour une flexion (ici, θ est l'angle de déformation et k_f est en N/rad)
- $C = k_t\theta$ pour une torsion (ici, C est le couple, θ est l'angle de déformation et k_t est en N.m/rad)