

LP - FAISCEAUX GAUSSIENS

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : PC

Bibliographie

➤ *Les lasers*, Dangoisse, chap 2

➤ http://pcjoffre.fr/Data/cours/OD6_DE_Physique_du_laser.pdf

➤ <http://alain.lerille.free.fr/2014/Poly20.pdf>

Très bonnes figures

Prérequis

- Optique
- Électromagnétisme
- Partie quantique du laser

Expériences



Table des matières

1	Le faisceau du laser	2
1.1	La forme générale du faisceau	2
1.2	Le rayon de courbure complexe	3
1.3	Paramètres importants	4
1.4	Le terme de phase	4
1.5	Modélisation	5
1.6	Application	5
2	Propagation d'un faisceau Gaussien à travers un système optique	6
2.1	Passage au travers d'une lentille mince	6
2.2	Focalisation d'un faisceau laser par une lentille	7
2.3	Élargissement du faisceau avec deux lentilles	8

Introduction

Les faisceaux des lasers sont fondamentaux dans la technologie moderne, puisqu'ils sont le support de nombreux appareils de mesure et de transmission d'information. Nous allons aujourd'hui étudier leur propriétés en partant du postulat que leur forme est dite *Gaussienne fondamentale*.

1 Le faisceau du laser

1.1 La forme générale du faisceau

Lorsque l'on cherche l'expression de l'onde en sortie d'un laser (dans l'approximation paraxiale), l'amplitude du champ électrique \mathcal{E} de vecteur d'onde k doit être solution de l'équation¹

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Les solutions de cette équation sont discrètes mais en nombre infini, et nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'à la première solution, la solution fondamentale, le *mode Gaussien*. Il s'agit du mode qui respecte la symétrie cylindrique, par conséquent on a tout intérêt à se placer en coordonnées cylindriques.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r} \right) = 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \quad (2)$$

On peut remarquer que l'onde plane et l'onde sphérique marchent là dedans, mais étant donné qu'on veut un système physique, on cherche une solution de la forme

$$\mathcal{E}(r, z) = A(z) \exp\left(-i \frac{kr^2}{2R(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \quad (3)$$

Les différents termes de l'équations peuvent s'interpréter comme suit :

- $A(z)$: variation de la phase en fonction de z et de l'amplitude pour conserver l'énergie totale. **Complexe.**
- $\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)$: variation Gaussienne du profil en x, y . Pour un z fixé, l'amplitude du champs diminue d'un facteur $1/e$ à une distance $r = w(z)$ de l'axe optique.
- $w(z)$ est donc l'extension radiale du faisceau
- $\exp\left(-i \frac{kr^2}{2R(z)}\right)$: Il s'agit de la définition du front d'onde, c'est à dire qu'on définit ainsi les surfaces de phase.
- $R(z)$ est alors le rayon des fronts d'ondes, qui serait le rayon d'une onde sphérique équivalente.

On voit ainsi que le faisceau Gaussien est entièrement caractérisé par la donnée de w et de R .

1. c'est l'équation de Schrödinger si tu regardes bien.

1.2 Le rayon de courbure complexe

On peut commencer par définir le *rayon de courbure complexe* $Q(z) = \left(\frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw^2(z)} \right)^{-1}$. L'intérêt premier de cette quantité est de pouvoir "sphérifier" l'expression de l'onde :

$$\mathcal{E}(r, z) = A(z) \exp \left[-i \frac{kr^2}{2Q(z)} \right] \quad (4)$$

L'insertion de cette forme dans l'équation différentielle 1.1 donne le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = 1 \\ \frac{dA}{dz} = -\frac{A}{Q} \end{cases} \quad (5)$$

La résolution donne alors $Q(z) = z + a$ avec $a = z_0 + iz_R$ un complexe quelconque. On peut choisir de placer l'origine de z en z_0 et pouf, magie :

$$Q(z) = z + iz_R \quad (6)$$

En z_0 on a un rayon de courbure infini, le front d'onde est plan, et $R(z) = \pm\infty$. On nomme z_R la *longueur de Rayleigh*. Sa signification physique viendra, ne t'en fais pas.

Par un habile report on obtient ensuite, avec $k = 2\pi/\lambda$

$$w(z=0) = w_0 = \sqrt{\frac{z_R \lambda}{\pi}} \quad (7)$$

puis dans un plan quelconque

$$\begin{cases} R(z) = z \left[1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right] \\ w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z_R^2}{z^2}} \end{cases} \quad (8)$$

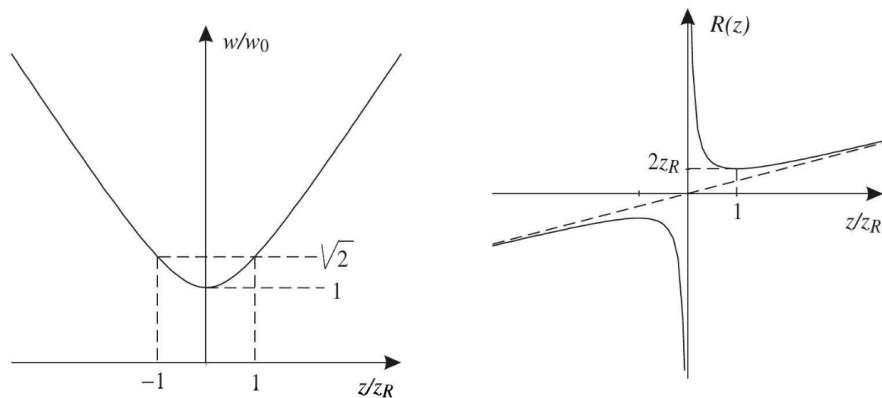


FIGURE 1 – Les fonctions w (rayon de ceinture) et R (rayon de courbure) normalisées.

1.3 Paramètres importants

On peut intégralement définir le mode Gaussien par deux paramètres : w_0 et z_R . Ces deux paramètres, nommé *waist* (ou *rayon de ceinture minimal*) et *longueur de Rayleigh*, sont reliés par l'équation :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{9}$$

Le point $z = 0$ est le point d'étranglement du faisceau, celui qui a le rayon minimal, w_0 . On a de plus que $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$.

La longueur de rayleigh est donc une mesure de la divergence du faisceau, tandis que w_0 mesure le pincement de ce dernier. Le bilan étant que **plus le faisceau est pincé, plus il diverge rapidement**.

Lorsque $z \gg z_R$, on peut écrire la relation

$$w(z) \simeq w_0 \frac{z}{z_R} \tag{10}$$

Cela donne naissance au concept d'*angle de divergence du faisceau* :

$$\tan \theta \simeq \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{11}$$

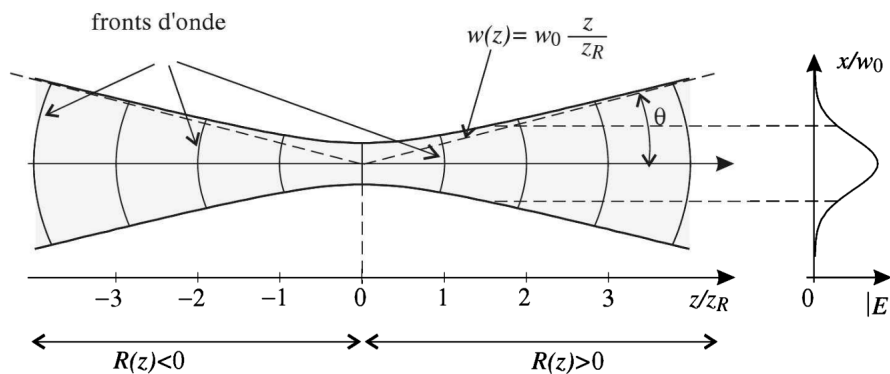


FIGURE 2 – Récapitulatif de tout ce bazar.

OdG

Les pointeurs lasers standards émettent dans le rouge à $\lambda = 700$ nm, avec un waist de $w_0 = 1$ mm. Alors $z_R = 4.5$ m. Le faisceau est peu divergent, d'où son usage comme pointeur. Certains laser atteignent des longueurs de rayleigh de l'ordre du kilomètre.

1.4 Le terme de phase

On a laissé de côté le problème du terme $A(z)$, cependant comme cela a été indiqué, par conservation de l'énergie, on peut le retrouver. En effet une intégration de 1.2 donne, avec C une constante arbitraire qu'on prendra à 1, et $\phi(z) = -\arctan \frac{z}{z_R}$:

$$A(z) = \frac{C}{1 - i \frac{z}{z_R}} = \frac{C}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} e^{-i\phi(z)} = C \frac{w_0}{w(z)} e^{-i\phi(z)} \tag{12}$$

Bilan :

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-ikz - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + \frac{kr^2}{2R(z)} \right] \tag{13}$$

Modes supplémentaires

Les modes d'ordres supérieurs sont décrits dans le \clubsuit Dangoisse, p. 45.

1.5 Modélisation

Une modélisation intéressante à faire du faisceau est celle du **Cône-Cylindre-Cône** (ou CCC).

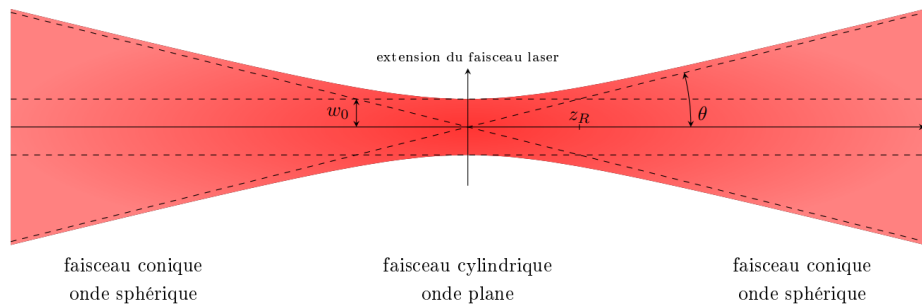


FIGURE 3 – Modèle CCC.

Pour $|z| < z_R$, l'onde est quasi plane, on la considère comme plane, c'est le domaine *cylindre*. Pour $|z| > z_R$, l'onde est quasi sphérique, on la considère comme sphérique, c'est la zone *cône*. Le cône a une ouverture $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{w_0}{z_R}$.

1.6 Application

Une application très standard de ces résultat est l'augmentation de la capacité des disques optiques, comme les DVD et les blueray. En effet, z_R est donné par la forme du lecteur, puisque le faisceau doit pouvoir faire un aller-retour entre le capteur et le disque sans trop s'élargir ($z_R \simeq$ quelques mm). On a alors une densité d'information limitée par w_0 , puisque les cases du disque ne doivent pas se superposer.

Ainsi en jouant sur la longueur d'onde, on peut diminuer w_0 et s'en sortir, comme le montre ce tableau !

disque optique	année	λ	couleur	capacité
CD	1982	780 nm	IR	0.7 Go
DVD	1997	650 nm	rouge	4.7 Go
blu-Ray	2006	405 nm	bleu	25 Go

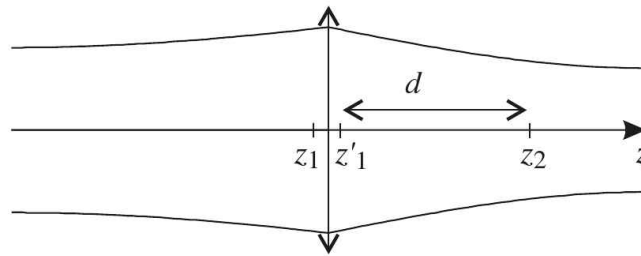
↓ Nous allons maintenant nous intéresser à ce qu'il se passe quand on utilise une lentille mince avec des faisceaux Gaussiens, afin de mieux comprendre les problèmes de focalisation et le fonctionnement des lentilles.

2 Propagation d'un faisceau Gaussien à travers un système optique

2.1 Passage au travers d'une lentille mince

On a vu qu'un faisceau Gaussien était complètement caractérisé par son rayon minimal w_0 (*a.k.a.* le *waist*) et son rayon de courbure $R(z)$. On a également constaté que ces deux informations pouvaient être rassemblées dans une seule grandeur : le rayon de courbure complexe $Q(z) = z + iz_R$, où z_R est la longueur de Rayleigh. Ainsi, dans le cas d'une propagation libre d'un faisceau laser entre deux plans z_1 et z_2 , on écrit

$$Q(z_2) = Q(z_1) + d \quad \text{avec} \quad d = z_2 - z_1 \tag{14}$$



Si on prend maintenant le cas d'une lentille mince, on se place dans une situation où les plans d'entrée et de sortie de la lentille sont confondus (car c'est une lentille *mince*) et la taille du faisceau $w(z)$ est identique que l'on soit juste avant ou juste après la lentille. Ainsi, la lentille ne va introduire qu'un terme de phase qui va modifier le rayon de courbure $R(z)$ du laser. On admet (après avoir utilisé les matrices de Jones, cf \clubsuit Dangoisse) que les rayons de courbures du laser avant et après la lentille sont liés par la relation suivante :

$$\frac{1}{R(z_2)} = \frac{1}{R(z_1)} - \frac{1}{f} \tag{15}$$

Ainsi, en fonction de la valeur de f , le rayon de courbure d'un faisceau sortant peut être négatif (convergence en sortie de la lentille) ou positif (divergence en sortie de la lentille).

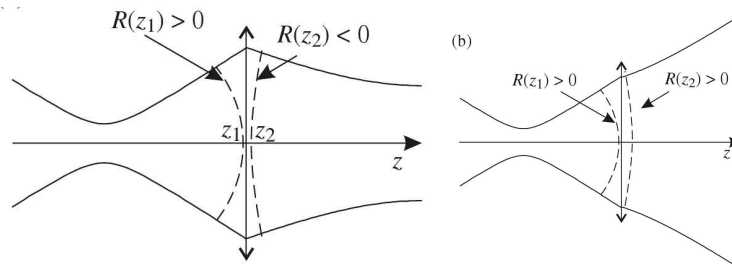


FIGURE 4 – Cas où $R(z_2) < 0$ à gauche et cas où $R(z_2) > 0$ à droite.

Remarque

Cette relation ressemble furieusement à la relation de conjugaison d'une lentille parce qu'on peut approximer le faisceau incident comme étant une onde sphérique émanant d'une source ponctuelle à la distance $R(z_1)$ en amont de la lentille et le faisceau sortant comme une onde sphérique convergeant vers un point image à la distance $R(z_2)$ en aval de la lentille.

Étant donné qu'on a établi que $w(z_1) = w(z_2)$, cette pseudo-relation de conjugaison est valable également pour les rayons de courbure complexes :

$$\frac{1}{Q(z_2)} = \frac{1}{Q(z_1)} - \frac{1}{f} \quad (16)$$

On peut maintenant s'attaquer au passage d'un laser à travers une lentille mince suivi d'une propagation libre. Pour cela, on note z_1 le point situé juste avant la lentille, z'_1 celui situé juste après la lentille et enfin z_2 le point situé à une distance $d = z_2 - z'_1$ de z'_1 . La relation 16 nous permet d'obtenir

$$Q(z'_1) = \frac{Q(z_1)}{1 - \frac{Q(z_1)}{f}}$$

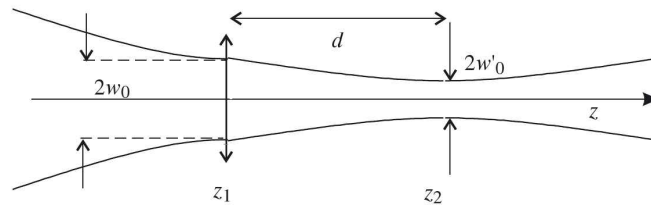
et la relation 14 donne alors

$$Q(z_2) = Q(z'_1) + d = \frac{\left(1 - \frac{d}{f}\right) Q(z_1) + d}{\left(-\frac{1}{f}\right) Q(z_1) - 1} \quad (17)$$

On peut mettre alors $Q(z_2)$ sous la forme $\frac{AQ(z_1) + B}{CQ(z_1) + D}$ et ainsi retrouver la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ caractérisant le système optique dans le formalisme de Jones².

Bilan : On peut relier le rayon de courbure juste avant la lentille avec le rayon de courbure juste après la lentille, et donc on peut intégralement définir le rayon sortant avec la focale et le rayon incident.

2.2 Focalisation d'un faisceau laser par une lentille



Plaçons-nous dans le cas d'un faisceau laser arrivant sur une lentille de sorte que son *waist* soit dans le plan d'entrée de la lentille, *i.e.* en z_1 . On cherche à connaître le nouveau *waist* w'_0 ainsi que sa position z_2 qui est à la distance d en aval de la lentille. Le faisceau incident a pour rayon de courbure complexe

$$Q(z_1) = \frac{ikw_0^2}{2} = iz_R \quad \text{où on rappelle que} \quad w_0 = \sqrt{\frac{z_R \lambda}{\pi}}$$

car $w(z_1) = w_0$ et donc $R(z_1)$ est infini. On a de même en z_2

$$Q(z_2) = \frac{ik(w'_0)^2}{2} = iz'_R$$

puisque $w'(z_2) = w'_0$ et donc $R'(z_2)$ est infini. La relation reliant $Q(z_2)$ à $Q(z_1)$ donne quant à elle

$$Q(z_2) = \frac{d + iz_R \left(1 - \frac{d}{f}\right)}{1 - i \frac{z_R}{f}} = d - \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_R}\right)^2} + i \frac{z_R}{1 + \left(\frac{z_R}{f}\right)^2} \quad (18)$$

Puisqu'il faut annuler la partie réelle, on obtient

$$d = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_R}\right)^2}$$

2. Plus d'infos dans les compléments du [4](#) Dangoisse, notamment des exemples de matrices pour divers systèmes optiques.

On peut également identifier la partie imaginaire pour obtenir la longueur de Rayleigh et donc le *waist* du laser en sortie :

$$z'_R = \frac{z_R}{1 + \left(\frac{z_R}{f}\right)^2} \iff \boxed{w'_0 = w_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{z_R}{f}\right)^2}}} \quad (19)$$

Ainsi, le faisceau est localisé à la distance d de la lentille.

Cas d'un faisceau peu divergent

Si le faisceau est peu divergent, notamment si $z_R \gg f$, alors on peut simplifier la formule précédente :

$$w'_0 = w_0 \frac{f}{z_R}$$

2.3 Élargissement du faisceau avec deux lentilles

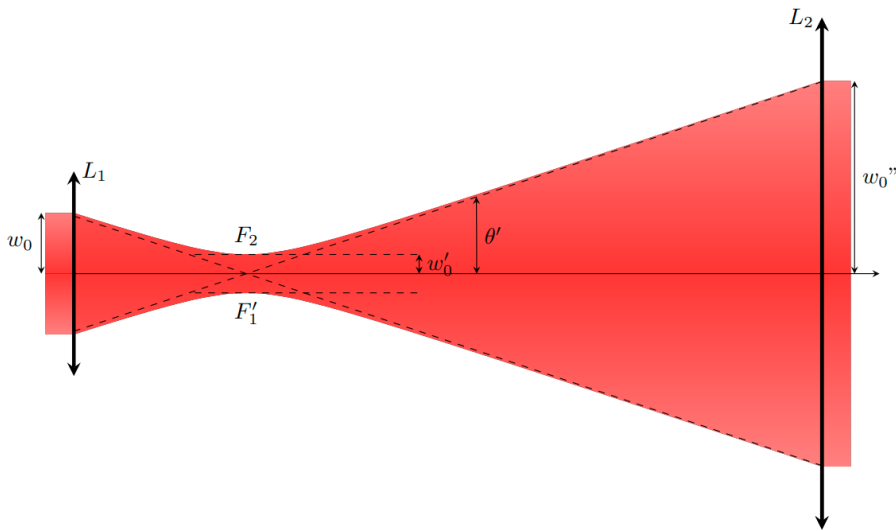


FIGURE 5 – Schéma du montage d'élargissement de faisceau.

On peut encore une fois partir de ce qu'on vient de voir précédemment et regarder ce qu'il se passe quand on fait passer un faisceau Gaussien dans un système afocal composé de 2 lentilles convergente.

Lorsque le faisceau laser arrive sur une première lentille de sorte à ce que son *waist* w_0 soit au niveau du plan d'entrée de cette lentille, il sort de la lentille avec un nouveau *waist* w'_0 positionné à une distance d de la lentille, conformément à ce qu'on vient de voir.

Le faisceau va ensuite se propager librement jusqu'à atteindre la seconde lentille. Puisque le *waist* w'_0 est proche du point focal image F'_1 de la première lentille et que le système est afocal, on sait que le *waist* du faisceau est également proche du point focal objet de la seconde lentille. On en déduit que le faisceau sortira de la seconde lentille de sorte à ce que son nouveau *waist* w''_0 soit proche du plan de sortie de la seconde lentille.

Tâchons maintenant d'exprimer w''_0 . Pour cela, on sait qu'après la première lentille, on a

$$w'_0 = w_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{z_R}{f_1}\right)^2}}$$

Pour la seconde lentille, on peut se rendre compte qu'on est dans la même situation que la partie précédente en considérant un faisceau allant dans le sens inverse, *i.e.* de la droite vers la gauche. Grâce au principe de retour inverse

de la lumière, on a donc

$$w'_0 = w''_0 \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{z''_R}{f_2}\right)^2}}$$

On trouve finalement

$$w''_0 = w_0 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{z''_R}{f_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{z_R}{f_1}\right)^2}} \quad (20)$$

En considérant **l'approximation du faisceau faiblement divergent**, *i.e.* $z''_R \gg f_2$ et $z_R \gg f_1$, on trouve :

$$\boxed{w''_0 = w_0 \frac{f_2}{f_1}} \quad (21)$$