LP – Régimes transitoires en électronique

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : CPGE/L2

Bibliographie

✍ http://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/ancien_site/phys_appl/Cours/electrocin/EC4.pdf
✍ MP33

Prérequis

➢

Expériences

☕

Table des matières

1 Régime transitoire du premier ordre

1.1 Décharge d'un condensateur dans une résistance

Commençons simplement avec un circuit RC série alimenté par un générateur de tension E constante. La loi des mailles donne alors

$$E = Ri + u_C$$

avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Or pour un condensateur on sait que $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc on obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

Cette équation se résout aisément pour donner une solution de la forme

$$u_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) + E \qquad \text{avec} \qquad \tau_C = RC$$

La constante A est déterminée par la condition initiale. Si on prend par exemple $u_C(t=0) = 0$ (typiquement on ferme le circuit à $t = 0$), on obtient $A = -E$ et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right)\right]}$$

Le régime établi est défini pour $t \to \infty$ et correspond à $u_{C,\infty} = E$ tandis que le régime transitoire correspond à la montée exponentielle de $u_C(t=0) = 0$ à $u_{C,\infty} = E$. Notons que l'on peut retrouver la valeur de τ_C en mesurant la pente à l'origine de la montée exponentielle.

1.2 Établissement du courant continu dans un RL

On peut faire la même chose avec un RL série, toujours alimenté par un générateur de tension E constante. On a cette fois

$$E = Ri + u_L$$

avec u_L la tension aux bornes de la bobine. Pour une bobine on sait que l'on a $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donc on obtient

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

Encore une fois, on résoud facilement cette équation pour trouver

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) + \frac{E}{R} \qquad \text{avec} \qquad \tau_L = \frac{L}{R}$$

Si on prend $i(t=0) = 0$ comme exemple de condition initiale, on obtient $A = -\frac{E}{R}$ et donc

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond à $i_\infty = \dfrac{E}{R}$ tandis que le régime transitoire correspond à la montée exponentielle de $i(t=0) = 0$ à $i_\infty = \dfrac{E}{R}$. Notons que l'on peut retrouver la valeur de τ_L en mesurant la pente à l'origine de la montée exponentielle.

1.3 Propriétés générales du régime transitoire

Ce régime transitoire d'ordre 1, bien que peu courant car les systèmes réels sont généralement plus complexes, a des propriétés intéressantes en pratique.

En effet, son temps de réponse peut être adapté en changeant les propriétés des composants, et sans créer de dépassement de commande, c'est à dire sans dépasser la valeur finale de tension. C'est un grand avantage car cela permet d'éviter une mauvaise surprise comme par exemple un composant qui grille parce que sa tension a été trop élevé sans qu'on le veuille.

Jusque là, rien de très excitant. Passons à la vitesse supérieure, et regardons des systèmes plus complexes.

$\downarrow$

2 Régime transitoire d'ordre 2

2.1 RLC général

Considérons maintenant un RLC série, alimenté par un générateur de tension E constante. La loi des mailles donne

$$E = Ri + u_L + u_C$$

en gardant les mêmes notations que la partie précédente. On a toujours $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et on a $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ donc cette fois on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

On écrire de façon générale cette équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ la pulsation propre et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ la facteur de qualité.

2.2 Résolution détaillée de l'équation, apparition de 3 régimes

Puisqu'on est à tension E constante, la solution particulière de cette équation est triviale puisque $u_C = E$ convient. On va donc surtout regarder la solution homogène de l'équation.

Pour trouver la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on pose le polynôme caractéristique de la-dite équation et on cherche ses racines. Dans notre cas, on s'intéresse donc au polynôme $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2$. Son discriminant est alors

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

On peut donc obtenir des racines réelles ou bien complexes, il faut alors distinguer 3 cas différents :

- **Premier cas :** $\Delta > 0 \iff Q < \dfrac{1}{2}$

Les deux racines sont réelles et valent

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

L'équation différentielle a donc une solution de la forme

$$u_C(t) = A\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right] + B\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right] + E$$

ou plutôt

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left\{A\exp\left(-\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) + B\exp\left(+\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)\right\} + E$$

Cette fois, il nous faut 2 conditions initiales pour trouver à la fois A et B. Si on prend comme condition initiale $u_C(t=0) = 0$ (condensateur initialement déchargé) et $i(t=0) = 0$ (circuit fermé à $t = 0$), *i.e.* $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$, on trouve

$$\begin{cases} A + B + E = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $A = B = -\frac{E}{2}$, et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cosh\left(\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond de nouveau à $u_{C,\infty} = E$. Cependant, dans le régime transitoire on observe une croissance monotone de u_C en partant de $u_C(t=0) = 0$ et jusqu'à atteindre $u_{C,\infty} = E$. C'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime apériodique**.

- **Second cas :** $\Delta = 0 \iff Q = \frac{1}{2}$

Cette fois, il n'existe qu'une racine au polynôme mais cette racine est toujours réelle et vaut

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

L'équation admet alors des solutions de la forme

$$u_C(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t) + E$$

On garde les mêmes conditions initiales, qui donnent alors

$$\begin{cases} B + E = 0 \\ A - \omega_0 B = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $A = -\omega_0 E$ et $B = -E$, et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - (\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)\right]}$$

Le régime établi correspond encore à $u_{C,\infty} = E$ et dans le régime transitoire correspond toujours à une croissance monotone de u_C en partant de $u_C(t=0) = 0$ et jusqu'à atteindre $u_C = E$. Cependant, on imagine bien que cela va changer quand Q va finalement devenir supérieur à $\frac{1}{2}$, et c'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime critique**.

- **Troisième cas :** $\Delta < 0 \iff Q > \frac{1}{2}$

Dans ce troisième et dernier cas, le polynôme possède de nouveau 2 racines mais qui sont complexes :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

L'équation différentielle admet alors des solutions de la forme

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left\{A\exp\left(-j\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right) + B\exp\left(+j\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)\right\} + E$$

Avec une fois de plus les mêmes conditions initiales, on obtient de manière similaire au premier cas

$$\begin{cases} A+B+E=0 \\ A-B=0 \end{cases}$$

On a donc de nouveau $A = B = -\dfrac{E}{2}$ et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1-\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos\left(\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond toujours à $u_{C,\infty} = E$, mais le régime transitoire à complètement changé de forme. En effet, il correspond cette fois à des oscillations de période ω_0 contenues dans une enveloppe exponentielle qui fera tendre u_C vers $u_{C,\infty} = E$. C'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime pseudo-périodique**.

2.3 En pratique : temps de réponse et dépassement

✍ http://fltsi.fr/tsi/tsi2/TP%20preparation%20oraux/3_MODELISATION%20EXPERIMENTALE_MCC/M%C3%A9thodes%20et%20abaques%20d%27identification%202014.pdf

En pratique, dans un système électrique ou plus généralement un système technologique, il faut prendre en compte deux facteurs : le temps de réponse à la commande et le dépassement de commande. En effet, si on prend l'exemple très simple d'un robot à laver les voitures (le gros rouleau), on ne veut pas attendre 20 minutes que le rouleau se mette en place, mais on ne veut pas non plus qu'il aille trop loin et casse la voiture.

Dans le cadre d'une réponse $s(t)$ à l'échelon $e(t)$, on définit le **dépassement de commande** D comme

$$D = \frac{s(+\infty) - \max_{t>0}(s(t))}{s(+\infty) - s(0)} \tag{1}$$

Généralement, on considère que $s(0) = 0$.

On définit également le temps de réponse à $n\%$ noté τ_n comme le temps à partir duquel la valeur de sortie reste à moins de $n\%$ de sa valeur finale.

Ces deux valeurs sont typiquement données par les paramètres standards du système, à savoir son coefficient d'amortissement et sa pulsation apparente.

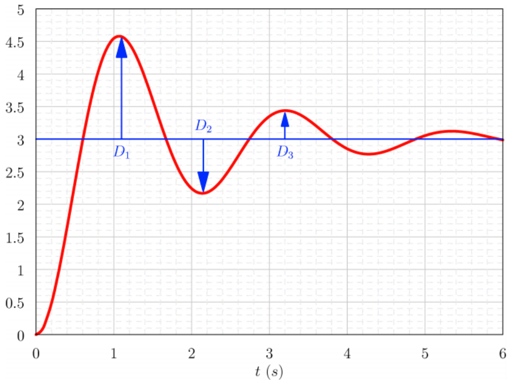

Figure 1 – Illustration des dépassements.

Les résultats principaux que l'on peut citer dans le régime pseudo périodique (c'est à dire le régime avec déplacement) sont que les dépassements sont situés à

$$t_i = i \times \frac{T_p}{2} = i \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \tag{2}$$

Et l'amplitude du $n$ieme vaut :

$$D_n = e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{3}$$

L'abaque ci-dessous permet de connaître la valeur du $k$ieme dépassement pour cent en fonction du facteur d'amortissement. Lorsque l'amortissement tend vers 1, on peut ainsi mettre en évidence que la valeur des dépassements est de plus en plus faible.

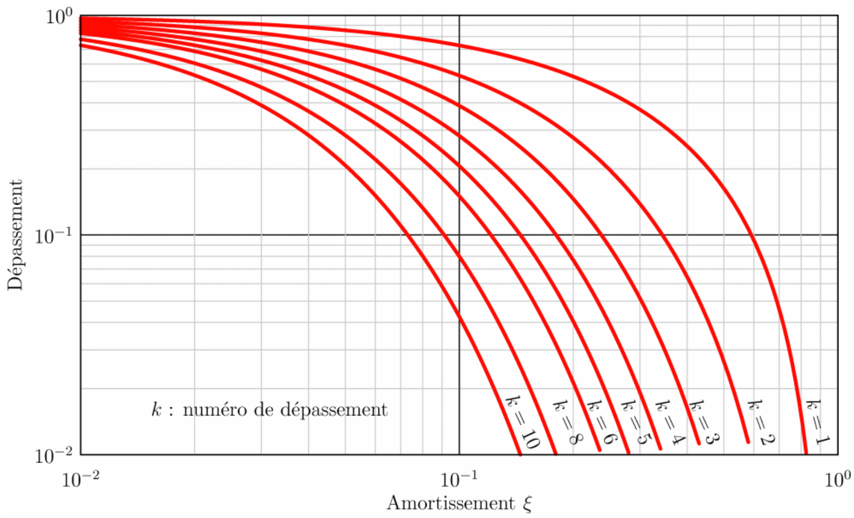

Figure 2 – Abaque des dépassements.

Le temps de réponse réduit se lit pour sa part sur une abaque de temps de réponse réduit. Ce que l'on nomme temps de réponse réduit c'est $\tau_{5\%}\omega_0$.

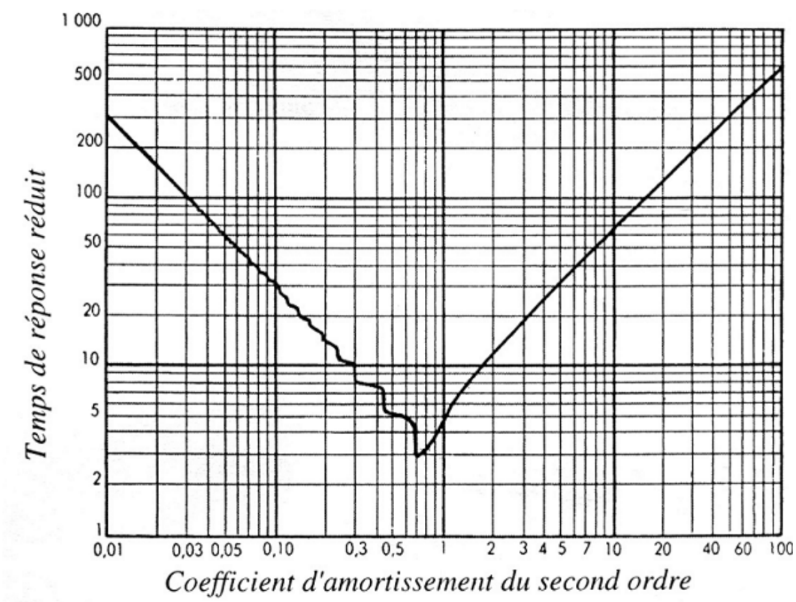

Figure 3 – Abaque de temps de réponse réduit.

On voit que le temps de réponse est minimal pour un amortissement de $\xi = \sqrt{2} \simeq 0.7$. La structure en escalier de la gauche de l'abaque est due aux dépassements successifs. Ainsi on peut en pratique mener l'étude d'un système et en prévoir les propriétés du régime transitoire simplement grâce à des abaques, qui sont en fait des courbes tracées numériquement pour nous limiter le travail !

3 Les autres régimes transitoires

✍ MP33