

# Chapitre 7

## Guidage d'ondes

Le guidage d'ondes électromagnétiques est omniprésente dans le transport de l'information. Nous verrons dans ce chapitre les bases du guidage d'ondes avec l'utilisation de conducteurs "parfaits" pour leur réflexion totale.

### 7.1 Réflexion sur un métal parfait : nécessité d'une onde réfléchie

Reprenons le cas d'une onde plane arrivant sur un métal parfait occupant le demi-espace  $x > 0$ . On a :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (7.1)$$

L'onde réfléchie est de la forme :

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + k' x + \varphi) \quad (7.2)$$

avec une pulsation et un nombre d'onde *a priori* différents, une phase supplémentaire et une propagation selon les  $x$  décroissants.

En  $x = 0$ , la condition aux limites s'écrit :

$$\mathbf{E}_i(0, t) + \mathbf{E}_r(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) + \mathbf{E}'_0 \cos(\omega' t + \varphi) = 0 \quad \forall t \quad (7.3)$$

Comme la condition aux limites est vraie pour tout temps alors on a nécessairement on a  $\omega = \omega'$  et donc par la relation de dispersion  $k = k'$ . De plus, pour la phase :

$$\varphi = \pi \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 \quad \text{ou} \quad \varphi = 0 \quad \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'_0 \quad (7.4)$$

Donc :

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad \mathbf{B}_r = -\frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_r = \frac{\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx) \quad (7.5)$$

Au voisinage du métal on a  $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_i$  qui vérifie bien les conditions aux limites.



Ainsi la réflexion sur un métal parfait a pour effet un déphasage de  $\pi$  pour le champ électrique et une simple réflexion sans déphasage pour le champ magnétique.

L'onde résultante vaut donc :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \quad (7.6)$$

Le passage en complexe permet d'écrire :

$$\underline{\mathbf{E}} = -2i\mathbf{E}_0 \sin(kx)e^{-i\omega t} \quad \mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin(\omega t) \quad (7.7)$$

De même on trouve :

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{e}_x}{c} \wedge \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos(\omega t) \quad (7.8)$$

Les champs sont de la forme  $f(x)g(t)$ , ce sont donc des ondes stationnaires. Les nœuds vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -q\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.9)$$

Les ventres vérifient :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = -\left(q + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.10)$$

Le vecteur de Poynting s'écrit alors :

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (7.11)$$

La puissance transportée à travers  $S$  est alors :

$$\mathbf{p}_t = \epsilon_0 S c E_0^2 \sin(2\omega t) \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}x\right) \mathbf{e}_x \quad (7.12)$$

Et la puissance moyenne vaut :

$$P = \langle \|\mathbf{p}_t\| \rangle = 0 \quad (7.13)$$

On a également que la charge surfacique est nulle car le champ transverse est nul. Le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (7.14)$$

## 7.2 Réflexion sous incidence oblique

On considère une OPDM polarisée rectilignement au plan d'incidence. Elle arrive sur un métal parfait avec un vecteur  $\mathbf{k}$  faisant un angle  $i$  avec la normale au métal.

$$\mathbf{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{e}_y \quad \mathbf{E}_r = E'_0 \cos(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} + \varphi) \mathbf{e}_y \quad (7.15)$$

Au voisinage du métal, le champ est nul donc comme précédemment, on a :

$$\omega = \omega' \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (7.16)$$

Donc  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  est orthogonal au plan d'incidence et au plan métallique. Comme les deux vecteurs d'onde ont la même norme d'après la relation de dispersion alors  $\mathbf{k}'$  est le symétrique de  $\mathbf{k}$  par rapport à la normale au plan métallique et au plan d'incidence. On retrouve la loi de la réflexion. La conclusion sur la phase est la même que précédemment. On trouve alors :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \mathbf{e}_y \quad (7.17)$$

$$B_y = 0 \quad (7.18)$$

$$B_x = \frac{2E_0}{c} \sin i \sin(kx \cos i) \sin(\omega t - kz \sin i) \quad (7.19)$$

$$B_z = -\frac{2E_0}{c} \cos i \cos(kx \cos i) \cos(\omega t - kz \sin i) \quad (7.20)$$

En espace limité, l'onde résultante est non plane, progressive et se propage selon  $z$ . On note :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} \sin i \mathbf{e}_z \quad v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \frac{\omega}{k \sin i} = \frac{c}{\sin i} > 0 \quad (7.21)$$

On a une onde stationnaire selon  $x$  avec des plan nœudaux :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.22)$$

Et des ventres tel que :

$$x = \left( q + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad (7.23)$$

On montre toujours que la charge surfacique est nulle et le courant surfacique vaut :

$$\mathbf{j}_S = 2\epsilon_0 c E_i \cos i \mathbf{e}_y \quad (7.24)$$

## 7.3 Guide d'ondes

### 7.3.1 Plan-plan

Deux plans métalliques, parfaits, illimités, parallèles, distants de  $a$ . Les plans étant infinis selon les directions  $y$  et  $z$  on va se placer dans un plan perpendiculaire aux deux plans du guide d'onde et propager une onde selon  $z$ . On place un plan en  $x = 0$  et un plan en  $x = a$ .

#### Modélisation et solutions

On envoie une OPPM dans ce guide d'ondes de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  faisant un angle  $i$  avec les plans. L'onde résultante est propagative selon  $z$  avec un vecteur d'onde :

$$\mathbf{K} = k \sin i \mathbf{e}_z \quad (7.25)$$

et on prend une onde est de la forme :

$$\mathbf{E} = E(x) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (7.26)$$

qui est un mode transverse électrique (TE). Les modes transverse magnétiques fonctionnent de la même façon mais avec le champ magnétique.

Les conditions aux limites vont donner la fonction  $E(x)$  : les plans métalliques doivent être des plans nodaux pour  $\mathbf{E}$ . La distance d'un plan nodal au plan  $x = 0$  est :

$$x = q \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad q \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a = n \frac{\lambda}{2 \cos i} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (7.27)$$

Pour chaque entier  $n$  on a un mode de propagation avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n \frac{\pi}{a \cos i} \quad (7.28)$$

avec le champ :

$$\mathbf{E} = -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \quad (7.29)$$

### Relations de dispersion

Pour trouver les relations de dispersion pour chaque mode, injectons la solution dans l'équation de d'Alembert. On trouve :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = K^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (7.30)$$

On obtient donc un filtre passe haut de pulsation de coupure  $\omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$ .

- Si  $\omega < \omega_{cn}$  alors  $\mathbf{K}$  est imaginaire et on a une onde évanescence.
- Si  $\omega > \omega_{cn}$  alors on a propagation à la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cn}^2}{\omega^2}}} > c \quad v_g v_\varphi = c^2 \quad (7.31)$$

Les modes transverse électrique (TE) et transverse magnétique (TM) de rang  $n$ , noté  $\text{TE}_n$  et  $\text{TM}_n$  sont entièrement caractérisés par un unique entier  $n$  non nul.

On voit donc que l'onde est loin d'être plane au sens strict du terme. En effet son amplitude varie sinusoïdalement dans les plans  $x = cte$  qui seraient les plans d'ondes naturels. Il existe des nœuds et des ventres dans les plans équiphasés. Pour une pulsation  $\omega$  donnée, il existe plusieurs modes de propagations, caractérisés par  $n$ , qui vérifient la relation de dispersion.

On remarque que pour une valeur de  $\omega$  donné tout les  $n$  ne sont pas accessibles. Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes.

Calculons maintenant le champ magnétique associé. Pour cela il faut revenir aux équations de Maxwell. En effet les relations de structures ne sont pas valable dans le cas présent, l'onde n'étant pas une onde plane ! En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \wedge \mathbf{E} \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z \\ &= 2E_0 \frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z + K 2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps :

$$\mathbf{B} = E_{0,n} \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - Kz) \mathbf{e}_z - \frac{K}{\omega} E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_x \quad (7.32)$$

L'onde se propage dans le vide mais pour autant elle n'est pas transverse ! Ce sont les conditions aux limites qui modifient considérablement la structure de l'onde. Celle-ci ne dépend donc pas uniquement du milieu de propagation.

### Décomposition en ondes planes

Remarquons que l'onde  $\text{TE}_n$  précédente peut se mettre sous la forme d'une superposition de deux ondes planes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= -2E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - Kz) \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 \left[ \sin\left(\omega t - Kz + \frac{n\pi x}{a}\right) + \sin\left(\omega t - Kz - \frac{n\pi x}{a}\right) \right] \mathbf{e}_y \\ &= -E_0 [\sin(\omega t - \mathbf{k}_{1,n} \cdot \mathbf{r}) + \sin(\omega t - \mathbf{k}_{2,n} \cdot \mathbf{r})] \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{E}_{1,n} + \mathbf{E}_{2,n} \end{aligned}$$

On y reconnaît la somme de deux vraies OOPH de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_{1,n}$  et  $\mathbf{k}_{2,n}$  de même composante selon  $z$  mais de composante opposée selon  $z$ . Il n'est pas étonnant que la solution se décompose sous forme d'OOPH (puisque ce sont une base des solutions de l'équation de d'Alembert). Nous verrons par la suite pourquoi cette décomposition est intéressante. Ces ondes par contre vérifient la relation de structure et la relation des ondes électromagnétiques dans le vide.

### Mode TM et mode TEM

Les calculs sont analogues à ceux menés dans la partie précédente dans le cas du mode TM et donne la même relation de dispersion. Un point important est l'existence d'une onde supplémentaire qui n'existe pas dans le cas des ondes TE. En effet dans le cas des ondes TM il existe une onde transverse électromagnétique (TEM). En effet, le groupe TE ne contient aucun mode TEM, puisque  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $B_z$  est non nul dès que  $n$  est non nul. C'est différent pour le groupe TM, puisque :

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_y \quad (7.33)$$

$$\mathbf{E} = cB_0 e^{i(\omega t - Kz)} \mathbf{e}_x \quad (7.34)$$

définit bien une onde TEM qui est bien du groupe TM et qui de plus compatible avec les conditions aux limites. En effet ce conditions impliquent la nullité de  $B_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  mais rien sur les autres composantes en raison de l'existence de charges et de courants surfaciques. En un sens, les ondes TM dans cette géométrie sont moins contraintes que les ondes TE. Cette onde est plane et vérifie la relation de dispersion  $\omega = Kc$ .

Il existe un certain nombre de résultats sur les ondes TEM :

- Un guide d'onde électromagnétique ne peut propager d'onde TEM que si il est constitué d'au moins deux conducteurs différents (nous aurons l'occasion de revenir sur ce résultat).
- Un mode TEM vérifie toujours la relation de dispersion des ondes planes dans le milieu illimité, même si cette onde n'est pas une onde plane au sens strict.
- Par opposition aux modes TE et TM, lorsque le mode TEM existe il est unique.

### Propagation des modes et dispersion

Pour le mode TE $_n$  comme pour le mode TM $_n$  nous avons obtenu la relation de dispersion :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad (7.35)$$

C'est une relation de dispersion de Klein-Gordon qui dépend de l'indice  $n$  du mode. On est donc amené à identifier :

$$\omega_{c,n} = \frac{p\pi c}{a} \quad (7.36)$$

qui est la fréquence de coupure du mode  $n$ . En réécrivant cette relation de dispersion, on obtient :

$$cK^2 = \omega^2 - \omega_{c,n}^2 \quad (7.37)$$

$$\frac{cK}{\omega_{c,1}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{c,1}^2} - n^2} \quad (7.38)$$

comme tracé sur la FIGURE 7.1.

Si on envoie une onde de pulsation  $\omega$  celle-ci va effectivement se déformer. En effet, l'onde va être transportée par différents modes qui ont des célérités différentes. On peut faire la construction comme sur la FIGURE 7.2 en exprimant les vitesses de phase et de groupe de chaque mode :

$$v_{\varphi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad v_{g,n} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2} \quad (7.39)$$

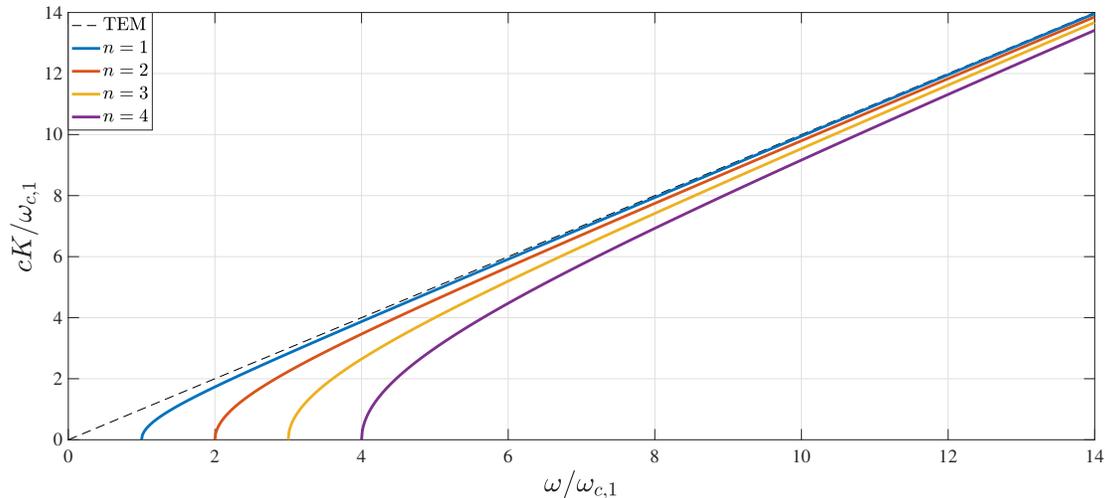


FIGURE 7.1 – Relation de dispersion du guide d'ondes électromagnétiques plan-plan. Pour une pulsation donnée, on va avoir plusieurs mode de propagation possible.

Pour un paquet d'onde à spectre fréquentiel étroit, les vitesses de propagation accessibles sont fortement élargies par la dispersion de mode, bien plus que la dispersion intramodale. Cela conduit à des fortes déformations voir même des dédoublements du signal. Les dimensions des guides d'ondes sont adaptés à la propagation de ces ondes pour s'assurer que ceux-ci restent monomodes.



On appelle **dispersion intermodale** ou **dispersion de mode** la différence de vitesse effective de propagation de deux ondes harmoniques de même pulsation mais portées par des modes différents. Elle est due aux conditions aux limites imposées à l'onde.

La **dispersion intramodale** caractérise la différence de vitesse effective de propagation entre deux harmoniques portées par le même mode ( $n$  fixé) mais de pulsation différentes. Elle est due aux propriétés intrinsèques du milieu (milieu dispersif) et aussi aux conditions limites.

La dispersion de mode est d'importance technologique car elle limite grandement l'information que peut transporter un guide d'onde, notamment les fibres optiques. Dans le cas illustré sur la FIGURE 7.3, on préfère utiliser un guide monomode.

En conclusion, si on considère l'ensemble des modes TE, la dispersion dans le guide d'onde est imposé par l'équation de Klein-Gordon, dupliquée autant de fois qu'il y a de modes. Si une OPPH du groupe TE de pulsation  $\omega$  est forcée à l'entrée du guide, sa propagation par le guide dépend de sa fréquence :

- Si  $\omega < \omega_{c,1}$ , tout les modes sont amortis et l'onde ne se propage pas dans le guide.
- Si  $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$  l'onde ne se propage que dans son mode fondamental, avec dispersion intramodale. La propagation se fait sans atténuation et le guide est monomode.
- Si  $\omega_{c,n} < \omega < \omega_{c,n+1}$ , l'onde est propagée par  $n$  modes, sans atténuation mais avec une double dispersion, à la fois intermodale et intramodale. Le guide d'onde est multimode.

Pour qu'une OPPH puisse se propager dans le guide, il faut que :

$$\begin{aligned} \omega &> \omega_{c,1} = \frac{\pi c}{a} \\ \frac{2\pi c}{\lambda} &> \frac{\pi c}{a} \\ \lambda &< 2a \end{aligned}$$

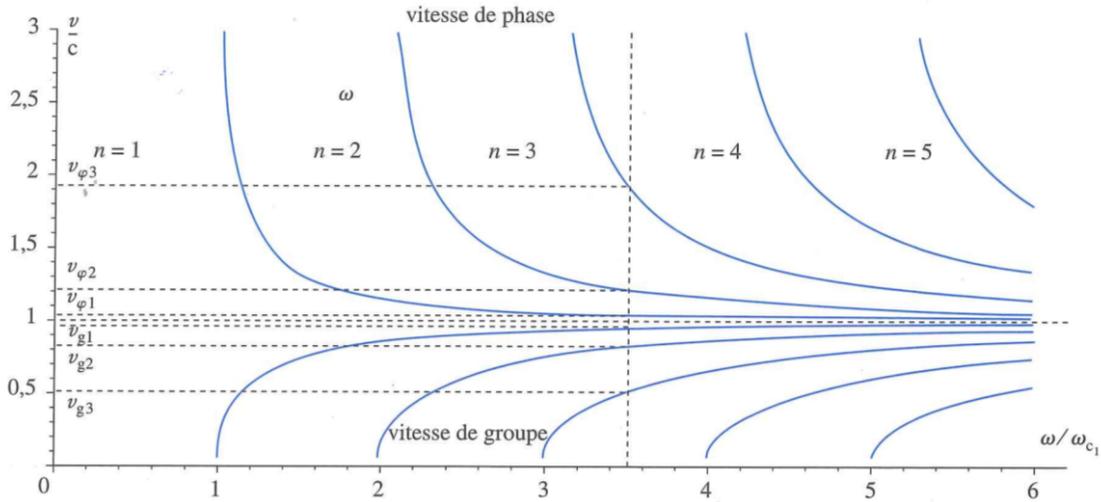


FIGURE 7.2 – Pour une valeur de  $\omega$  donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles (ici trois) correspondant à des valeurs de  $k$  différentes et donc à des valeurs de vitesses de phase et groupe différentes. ceci induit de la dispersion intermodale.

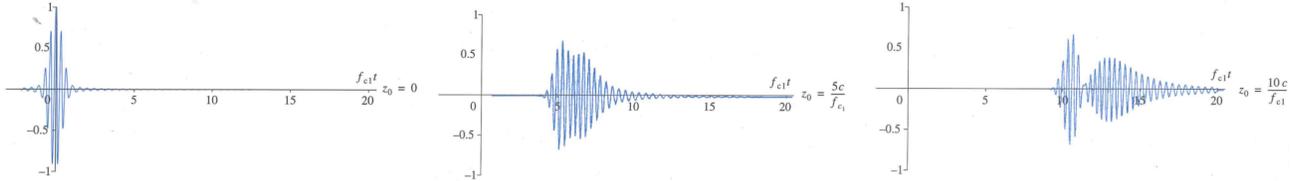


FIGURE 7.3 – Illustration de la dispersion intermodale : dédoublement d'un paquet d'ondes dans un guide pour les modes TE1 et TE2 avec  $\omega = \frac{3}{2}\omega_{c,1}$ .

On retrouve le critère géométrique sur la longueur d'onde de l'OPPH qui est très général. Le préfacteur dépend du guide d'onde et de sa géométrie. Attention cependant à ne pas interpréter ce critère comme une longueur qui rentre ou pas dans le guide d'onde puisque  $\lambda$  correspond à la longueur d'onde dans la direction de propagation.

### 7.3.2 Extension au guide rectangulaire

On ajoute deux plans de métal parfait parallèles distants de  $b$ . Une onde TE se propage selon  $z$ , soit  $\underline{E}_x$ ,  $\underline{E}_y$ ,  $\underline{B}_x$ ,  $\underline{B}_y$ ,  $\underline{B}_z$  les composantes complexes cherchées. On cherche  $B_z$  sous la forme :

$$\underline{B}_z = f(x)g(y)e^{i(Kz-\omega t)} \tag{7.40}$$

On a les équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \nabla \wedge \underline{E} = i\omega \underline{B} \quad \nabla \wedge \underline{B} = -\frac{i\omega}{c} \underline{E} \tag{7.41}$$

On trouve alors les relations :

$$\underline{B}_x = -\frac{K}{\omega} \underline{E}_y \quad \underline{B}_y = \frac{K}{\omega} \underline{E}_x \tag{7.42}$$

$$-\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_x = \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial y} = -iK \underline{y}_y \quad -\frac{i\omega}{c^2} \underline{E}_y = -\frac{\partial \underline{B}_z}{\partial x} = iK \underline{B}_x \tag{7.43}$$

On pose :

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 \tag{7.44}$$

d'où :

$$\underline{\mathbf{E}}_x = \frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y} \quad \underline{\mathbf{E}}_y = -\frac{i\omega}{k_c^2} \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x} \quad (7.45)$$



Pour avoir une onde TEM il faut que  $B_z$  soit égale à 0 mais dans ce cas on a toutes les autres composantes nulles et donc il n'y a pas de telle onde qui se propage.

Ce résultat est indépendant de la forme de la section droite du guide à condition qu'elle soit délimitée par une courbe fermée ce qui n'est pas le cas du guide plan-plan où un mode TEM est possible.

On a par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \underline{\mathbf{B}}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + k_c^2 = 0 \quad (7.46)$$

Or, la somme d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $y$  ne peut être constante quelque soit  $x$  et  $y$  sauf si  $p, q \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{f''}{f} = -p^2 \quad \frac{g''}{g} = -q^2 \quad p^2 + q^2 = k_c^2 \quad (7.47)$$

Alors :

$$f(x) = A \cos(px) + B \sin(px) \quad g(y) = C \cos(qy) + D \sin(qy) \quad (7.48)$$

Donc :

$$\underline{\mathbf{B}}_z = (A \cos(px) + B \sin(px))(C \cos(qy) + D \sin(qy))e^{i(Kz - \omega t)} \quad (7.49)$$

Conditions aux limites pour le champ électrique :

$$E_y(0 \text{ ou } a, y, z, t) = 0 \quad \partial_x \underline{\mathbf{B}}_z|_{x=0,a} = \partial_x f|_{x=0,a} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad p = m \frac{\pi}{a} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7.50)$$

$$E_y(x, 0 \text{ ou } b, z, t) = 0 \quad \partial_y \underline{\mathbf{B}}_z|_{y=0,b} = \partial_y g|_{y=0,b} = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0 \quad q = n \frac{\pi}{b} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (7.51)$$

Donc  $p$  et  $q$  sont quantifiés et ne peuvent être nuls simultanément sinon les composantes transverses des champs seraient nulles.

Chaque couple  $(n, m)$  détermine un mode de propagation noté  $TE_{mn}$  de champs :

$$B_z = B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - kz) \quad (7.52)$$

$$E_x = -\frac{\omega}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_y = \frac{K}{\omega} E_x \quad (7.53)$$

$$E_y = \frac{\omega}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} B_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - kz) \quad B_x = -\frac{K}{\omega} E_y \quad (7.54)$$

Les conditions sur  $\mathbf{B}$  sont alors vérifiées. La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (7.55)$$

Chaque mode  $(n, m)$  est un filtre passe haut de pulsation de coupure :

$$\omega_{cn,m} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (7.56)$$

Dans la bande passante on a :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cnm}}{\omega}\right)^2}} > c \quad (7.57)$$

Condition monomode : pour  $a > 2b$ , le mode  $TE_{10}$  est le seul mode à se propager si  $\omega_{c10} < \omega < \omega_{c20}$ , le guide est monomode si  $a < \lambda < 2a$ . En ordre de grandeur, pour une fibre standard on a  $a = 2.25b = 2.28$  cm soit  $2.28 \text{ cm} < \lambda < 4.56 \text{ cm}$ . Pour être sûr d'être monomode on prend  $2.42 \text{ cm} < \lambda < 4.35 \text{ cm}$