

# MP28 – INSTABILITÉS ET PHÉNOMÈNES NON-LINÉAIRES

20 avril 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

## Commentaires du jury

- 2017 : Ce montage ne peut pas se limiter à étudier le non isochronisme des oscillations du pendule pesant.
- 2014, 2015, 2016 : Il s'agit de bien d'illustrer quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique ...
- 2010, 2013 : Il s'agit de bien illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires : pluralité des positions d'équilibre, bifurcation, caractérisation des non linéarités, enrichissement spectral, doublement de période, ralentissement critique..., en fonction du ou des système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage.
- 2011 : Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l'intitulé du montage. Cette année, les présentations se sont trop souvent limitées aux aspects non-linéaires.

## Bibliographie

- *BUP 867 et 891* → Pendule grand angle
- *Physique expérimentale, FLTCLD* → Pendule grand angle
- *Électronique expérimentale, Krob* → Van der Pol
- *Hydrodynamique physique, Guyon, Hulin, Petit* → Instabilité de Taylor-Couette
- *Dictionnaire de physique. Tome 1. Mécanique, Quarranta* → Instabilité de Taylor-Couette
- *Cours de Capillarité, Etienne Lidon* → <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document>, instabilité de Rayleigh-Plateau

## Expériences



## Table des matières

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Le pendule pesant non-linéaire</b>                        | <b>2</b> |
| 1.1      | Équation du pendule . . . . .                                | 2        |
| 1.2      | Étude de stabilité (rapide) . . . . .                        | 2        |
| 1.3      | Calibrage de la réponse du capteur . . . . .                 | 3        |
| 1.4      | Portrait de phase et non-linéarité . . . . .                 | 3        |
| 1.5      | Quantification de la non linéarité et modélisation . . . . . | 3        |
| <b>2</b> | <b>Oscillateur de Van der Pol</b>                            | <b>4</b> |
| 2.1      | Présentation de l'élément non linéaire . . . . .             | 4        |
| 2.2      | Naissance des oscillations et cycle limite . . . . .         | 5        |
| 2.3      | Étude de la bifurcation . . . . .                            | 6        |
| 2.4      | Autres effets de la non linéarité . . . . .                  | 6        |
| <b>3</b> | <b>Oscillateur double puits</b>                              | <b>7</b> |
| 3.1      | Retour sur le pendule . . . . .                              | 7        |
| 3.2      | Double-puits électronique . . . . .                          | 8        |

## Introduction

La physique, c'est la science de l'approximation, et la première approximation que l'on fait toujours, c'est celle de la linéarité. Dans ce montage, on va montrer les limites de ce modèles et des modèles plus fins, qui permettent de conserver un traitement analytique ou expérimental des problèmes non-linéaires.

## 1 Le pendule pesant non-linéaire

### 1.1 Équation du pendule

Je crois qu'on peut raisonnablement la rebalancer. Pour nous  $\omega_0 = \frac{MgL}{J_0 + ML^2}$  avec  $M$  la masse attachée à la barre,  $L$  la longueur de la tige entre la masse et le rotor,  $J_0$  le moment d'inertie du pendule.

$$\ddot{\theta} = \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

D'habitude on fait l'approximation de  $\sin \theta = \theta$ , mais dans la pratique on sait très bien que cela ne marche pas, et on va le vérifier ici.

**Dessiner le potentiel.**

### 1.2 Étude de stabilité (rapide)

On voit que l'introduction d'un terme non linéaire entraîne l'apparition d'un deuxième point d'équilibre. En effet là où l'équation du pendule harmonique prévoit un unique point d'équilibre,  $(0,0)$ , on voit que  $(\pi,0)$  en est un aussi. D'ailleurs on peut remarquer qu'aux grands angles, l'équation linéaire n'a aucun sens, puisqu'elle prédit des mouvements totalement fantaisistes du pendule.

On remarque également que ce nouvel équilibre est instable. En effet si on prend un pendule en  $(\pi,0)$ , on le lâche, on met un angle  $\epsilon$ , et cet angle diverge et ne nous ramène pas à la position d'équilibre.

#### Stabilité des points



Montrer en direct la stabilité. Toucher le matos quoi.

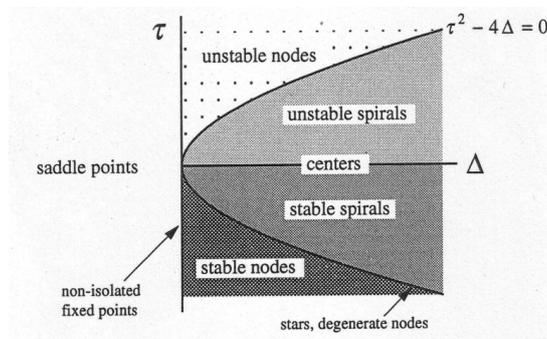
#### Étude théorique de la stabilité :

On a  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ . Si le système est sympa (les nôtres le sont), on peut écrire  $\dot{\vec{u}} = f(\vec{u}) = [f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)]$  avec  $f$  différentiable. Alors on peut écrire la Jacobienne de  $f$  :

$$A(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

On a alors un théorème sympa qui dit ça : *Le déterminant et la trace de la matrice Jacobienne en un point d'équilibre nous renseigne sur sa stabilité et sa forme.*

On nomme  $\tau$  la trace et  $\Delta$  le déterminant, et on a :



Ici on a  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$ , soit  $\tau = 0$  et  $\Delta = \omega_0^2 \cos(\theta)$ . Pour le point du bas, on a un centre, pour le point du haut, on a un point selle.

Il est bon de noter qu'en vérité le point du bas est une spirale stable ou un noeud stable, en fonction de la violence de l'amortissement.

### 1.3 Calibrage de la réponse du capteur

Présenter le matos, dire que c'est un potentiomètre, et que par conséquent on a une réponse linéaire du capteur.

#### Étalonnage du capteur

☞ ⊕ 5mm

Il faut vérifier la réponse linéaire du capteur. Ajouter simplement un point pour le jury. Bien caler le pendule au support boy pour fixer l'angle.

**Attention aux incertitudes.**

#### Mesure de $J_0$

☞ ⊕

On mesure  $J_0$  par une régression linéaire sur le log de la période en fonction de la longueur, À PETITS ANGLES. Pas la peine de le montrer au jury, c'est juste pour nous. TABULÉ :  $J_0 = 2.8 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$

### 1.4 Portrait de phase et non-linéarité

#### Mise en évidence des effets de la non linéarité

☞ ⊕

Après acquisition du signal par Latis-Pro, on peut constater la modification du spectre, via transformée de Fourier :

- Décalage de la fréquence fondamentale
- Apparition d'une fréquence à  $3\omega_0$

Portrait de phase, et constater qu'aux grands angles les ellipses (caractéristiques d'un oscillateur linéaire) sont déformées car le mouvement n'est plus sinusoïdal.

MONTRER LE PROGRAMME PYTHON, montrer que le centre devient un noeud spirale, voire un noeud stable, avec l'atténuation. Noter que cet effet est **Linéaire**.

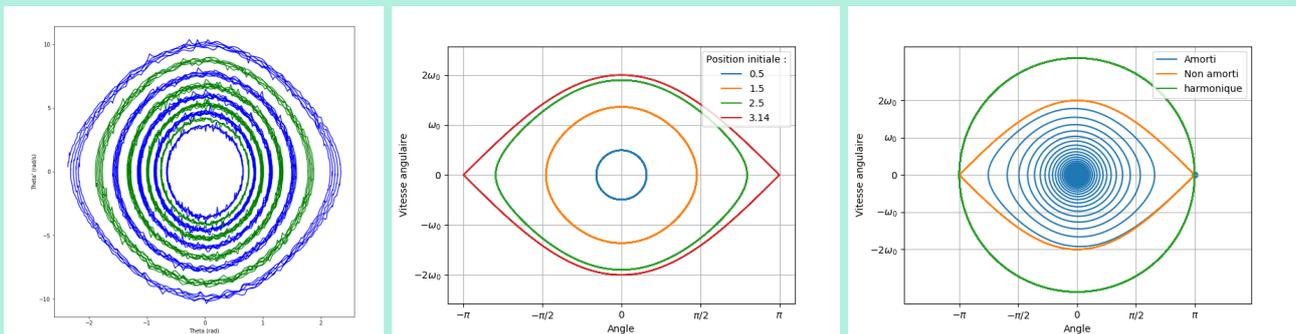


FIGURE 1 – Portraits de phase, expérimental puis théorique.

### 1.5 Quantification de la non linéarité et modélisation

On voit l'apparition d'un pic à  $3\omega_0$  dans la TF, ça nous fait furieusement penser à un développement d'ordre supérieur du sinus, car  $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$ . Ainsi on a pour les *petits mais pas si petits que ça* angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \mathcal{O}(\theta^7) \right) = 0 \tag{1}$$

Si on va plus loin dans le développement théorique, on obtient la formule suivante, pour un lancé sans vitesse initiale, à l'angle initial  $\theta_0$ . On y voit de manière explicite la perte de l'isochronisme des oscillations.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + \mathcal{O}(\theta_0^6) \right) \quad (2)$$

### Formule de Borda

⚡ Jolidon

⊖ 5mn

Avec un chronomètre on chronomètre 5 périodes pour différents angles  $\theta_0$ , pour pouvoir négliger autant que possible les pertes par frottement ET les incertitudes de mesure sur le chrono.

On en déduit T, et on fait une régression. Au choix linéaire en  $\theta_0^2$  ou polynomiale custom.

3 moyens de vérifier que l'on est bien, car trois valeurs  $\omega_0$ .

## 2 Oscillateur de Van der Pol

⚡ Krob p170

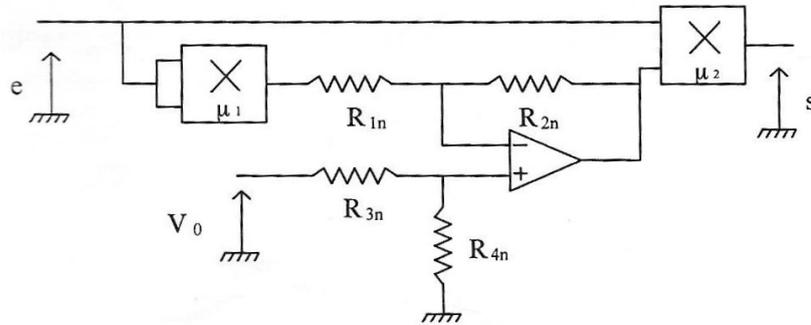
L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur qui est décrit par l'équation suivante :

$$\ddot{s} - \epsilon\omega_0 \left( 1 - \left( \frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (3)$$

On repère immédiatement le terme non linéaire dans cette équation, à savoir le pré-facteur du terme  $\dot{s}$ . Le coefficient  $\epsilon$  pilote la non linéarité et quand  $\epsilon = 0$  on retrouve l'oscillateur harmonique classique. Il reste maintenant à construire un circuit électrique qui correspond à cette équation.

### 2.1 Présentation de l'élément non linéaire

Commençons d'abord par nous intéresser à l'élément non linéaire de l'oscillateur. Le boîtier P42.46 fera l'affaire dans notre cas, et il peut être modélisé par le circuit suivant :



Il s'agit d'un circuit à résistance négative alimenté par une tension  $V_0$  et composé de 4 résistances, 2 multiplieurs et un AO. Pour la mise en équation, on suppose que l'AO est les multiplieurs sont idéaux.

Le multiplieur  $\mu_2$  multiplie les signaux en entrée  $x_1$  et  $x_2$  avec un coefficient  $-K < 0$  (peut être faut-il rajouter un inverseur en amont, absent du schéma tiré du Krob?) pour avoir une sortie de la forme  $s = -Kx_1x_2$  avec :

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \frac{R_{4n}}{R_{4n} + R_{3n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} V_0 - \frac{K R_{2n}}{R_{1n}} e^2$$

On obtient alors une sortie de la forme

$$s = \left[ -K \frac{R_{4n}}{R_{4n} + R_{3n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} V_0 \right] e + \left[ \frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}} \right] e^3 \quad \Leftrightarrow \quad s = \alpha e + \beta e^3 \quad (4)$$

avec  $\alpha = -K \frac{R_{4n}}{R_{4n} + R_{3n}} \frac{R_{1n} + R_{2n}}{R_{1n}} V_0 < 0$  et  $\beta = \frac{K^2 R_{2n}}{R_{1n}} > 0$ . Cette élément a donc une caractéristique polynomiale d'ordre 3 et donc bien non linéaire. La pente de cette caractéristique à l'origine nous permet d'estimer  $\alpha$  puis on peut remonter à la valeur de  $\beta$  grâce à la mesure des abscisses des zéros non nuls  $e_1$  et  $e_2$  de la caractéristique qui donnent  $\beta = -\frac{\alpha}{e_1^2}$ .

## Caractéristique de l'élément non-linéaire

✎ Krob

⊖ 10 min

### Matériel :

- boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39
- oscilloscope
- GBF
- carte d'acquisition + LatisPro

Utiliser le boîtier P42.46 composé des résistances  $R_{1n} = R_{3n} = 6.2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{2n} = 82 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{4n} = 2 \text{ k}\Omega$  et de multiplieurs de gain  $K = 0.1 \text{ V}^{-1}$ . Il est alimenté par le boîtier P42.39.

Appliquer une tension sinusoïdale  $e$  d'amplitude  $3 V_{pp}$  et de fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$ .

Dans un premier temps, envoyer  $e$  et  $s$  sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope. Passer en mode XY pour observer la caractéristique. Faire varier  $V_0$  entre  $-2 \text{ V}$  et  $2 \text{ V}$  et observer comme la caractéristique est modifiée (notamment la pente à l'origine  $\alpha$ ).

Dans un second temps, fixer  $V_0 = 1 \text{ V}$ . **On ne touchera plus à cette valeur.** Acquérir  $e$  et  $s$  sur LatisPro et tracer  $s = f(e)$ . Faire un fit polynomial d'ordre 3 pour obtenir  $\alpha$  et  $\beta$ . On attend  $\alpha = -0.347$  et  $\beta = 0.132 \text{ V}^{-2}$ .

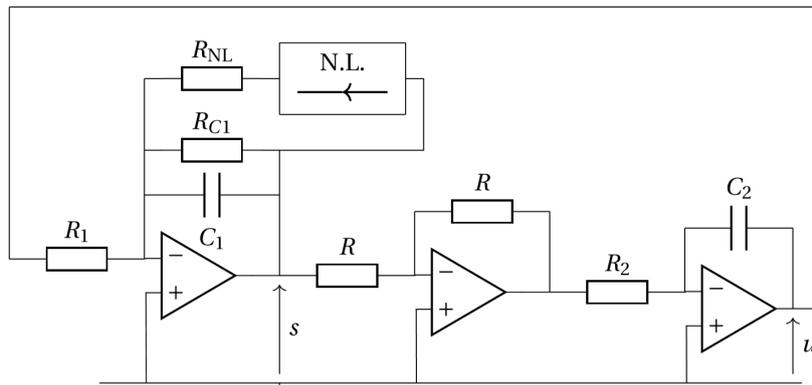
Ne pas oublier de discuter des incertitudes.

### Remarques

- Il ne faut pas appliquer des tensions trop importantes sous peine de saturer l'AO ni avoir une fréquence trop élevée sous peine d'avoir des effets d'hystérésis dans les multiplieurs.
- Pour vraiment se convaincre de la validité du fit cubique, on peut regarder la FFT de  $s$  sur LatisPro et trouver un premier pic à  $f$  et un second à  $3f$ .

## 2.2 Naissance des oscillations et cycle limite

Maintenant qu'on a vu ce qu'allait être l'élément non linéaire du circuit, on peut construire l'oscillateur de Van der Pol. Pour cela, on réalise le circuit électrique suivant, où le composant NL est le boîtier non-linéaire vu précédemment :



Ce circuit est composé de 3 AO, le premier et le troisième étant des intégrateurs tandis que le second est un inverseur. L'équation associée à ce circuit est alors :

$$\ddot{s} + \frac{1}{C_1} \left( \frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{1}{R_{C1}} \right) \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{s}{s_0} \right)^2 \right] \dot{s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} s = 0 \iff \ddot{s} - \epsilon \omega_0 \left( 1 - \left( \frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (5)$$

en posant

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (6)$$

$$\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1 R_2 C_2}{C_1}} \frac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{C1} R_{NL}} \quad (7)$$

On voit donc qu'on peut faire varier  $\epsilon$  avec  $R_{NL}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \text{amplification} &\iff \text{le terme devant } \dot{s} \text{ est négatif} \\ &\iff \epsilon > 0 \\ &\iff R_{NL} < -\alpha R_{C_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Si  $R_{NL}$  ne satisfait pas cette condition, le terme d'amortissement est positif et donc les oscillations disparaissent.

### Mise en évidence des deux régimes et détermination de $R_{NL}$

⚡ Krob

⊖

#### Matériel :

- boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39
- $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{C_1} = 100 \text{ k}\Omega$  et  $C_1 = C_2 = 0.1 \text{ }\mu\text{F}$
- boîte à décades de résistance  $R_{NL}$
- oscilloscope

Réaliser le montage ci-dessus. Montrer à l'oscilloscope les deux régimes (avec et sans oscillations) et chercher la valeur limite de  $R_{NL}$  (elle est vers 20-25 k $\Omega$ ).

Tracer en mode XY les cycles (plus ou moins déformés) dans le plan de phase.

En ouvrant le circuit puis en le refermant, on devrait voir la convergence vers le cycle limite par des oscillations à l'intérieur ou à l'extérieur du cycle selon les conditions limite (ouverture de la branche contenant l'élément non linéaire ou court-circuit de l'entrée inverseuse du premier AO en la reliant à la masse). En effet, on a convergence depuis la condition initiale (intérieur du cycle dans le premier cas, extérieur dans le second à cause de la saturation des AO). *L'utilisation du mode persistance de l'oscilloscope est très utile.*

On a donc au passage de cette valeur limite une bifurcation. On passe d'un régime avec un *point fixe attracteur* (0,0) non oscillant ( $R_{NL} > -\alpha R_{C_1}$ ) à un régime instable oscillant avec un *cycle limite* ( $R_{NL} < -\alpha R_{C_1}$ ). On va essayer de caractériser un peu plus le passage de l'un à l'autre et ainsi la force de la non-linéarité.

## 2.3 Étude de la bifurcation

Les oscillations dans le circuit sont quasi-sinusoidales tant que  $0 < \epsilon < 0.05 \iff 23.1 \text{ k}\Omega < R_{NL} < 34.7 \text{ k}\Omega$ . Les oscillations ont une fréquence  $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$  et une amplitude **crête à crête** :

$$s_{cc} = 4\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C_1}}} \quad (9)$$

#### Nota Bene

La formule du ⚡ Krob p167 est **fausse**.

### Vérification de l'expression de l'amplitude des oscillations

⚡

⊖

Pour différentes valeurs de  $R_{NL}$  entre 23.1 k $\Omega$  et 34.7 k $\Omega$ , mesurer  $s_{cc}$ .

Tracer  $s_{cc}^2 = f(R_{NL})$  puis remonter à  $\alpha$  et  $\beta$  par régression linéaire.

Ne pas oublier de discuter des incertitudes.

## 2.4 Autres effets de la non linéarité

Quand on diminue  $R_{NL}$ ,  $\epsilon$  croît et les oscillations quasi-sinusoidales tendent vers des oscillations de relaxation plus riches en harmoniques. De plus, la période des oscillations n'est plus constante par rapport à  $R_{NL}$ . On peut montrer que

$$\lim_{\epsilon \gg 1} T = (3 - \ln 4) \frac{\epsilon}{\omega_0} \quad (10)$$

### Enrichissement spectral et augmentation de la période de oscillations

⚡ ⊖  
Réduire progressivement  $R_{NL}$  de 20 k $\Omega$  à quelques ohms et constater la déformation du signal de sortie qui n'est plus sinusoïdale. On peut aussi observer la déformation du cycle en mode XY.

Pour chaque valeur de  $R_{NL}$ , mesurer la période  $T$  des oscillations et calculer  $\epsilon$  grâce à l'équation 7. Tracer  $T = f(\epsilon)$  puis ajouter sur le graphe la droite  $T = (3 - \ln 4) \frac{\epsilon}{\omega_0}$  pour observer la convergence des mesures expérimentales vers cette droite.

#### Remarque

**Il peut être nécessaire de sacrifier certaines parties du pendule ou de Van der Pol si on veut présenter le double-puits.**

↓ *Un puit c'est bien, deux puits c'est mieux!*

## 3 Oscillateur double puits

Ici on s'intéresse à un oscillateur non linéaire avec un profil de potentiel un peu... Particulier.  
**Dessiner le potentiel en double puits.**

### 3.1 Retour sur le pendule

Une façon de faire un double puits c'est de mettre des aimants. La mise en équation devient difficile car il faut être capable d'exprimer l'attraction d'un aimant sur le pendule.

Le point central devient un point d'équilibre instable (un col), deux centres de plus apparaissent. Ceci correspond à une bifurcation fourche supercritique.



### Pendule double-puits

⚡ ⊖  
Montrer que l'ancienne position d'équilibre stable est devenue instable.  
Faire plusieurs acquisitions et voir que le pendule est piégé à l'état final à l'une ou l'autre des nouvelles positions d'équilibre stable.  
Tracer le portrait de phase sur un temps d'acquisition long.

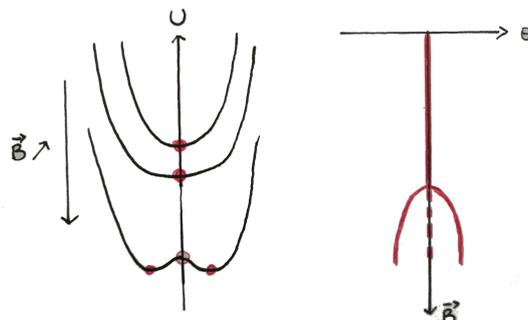
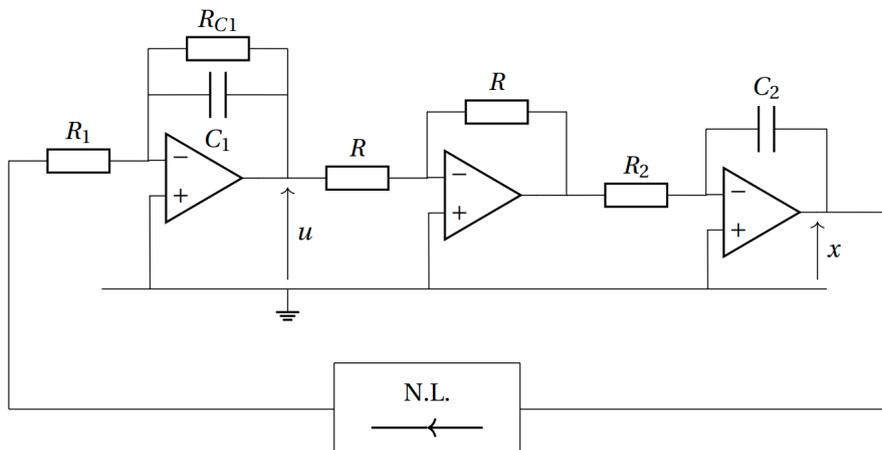


FIGURE 2 – Discutons de bifurcation

### 3.2 Double-puits électronique

On peut obtenir un potentiel double-puits en changeant la place de l'élément non-linéaire dans l'oscillateur Van der Pol et en le plaçant dans la boucle de rétroaction. On a donc le montage électrique suivant :



#### Remarque

Nous n'avons plus de paramètre de contrôle  $R_{NL}$ . De plus, les valeurs des résistances et des capacités **seront différentes** par rapport au montage utilisé pour Van der Pol.

La nouvelle équation caractérisant le montage est alors :

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \delta x + \lambda x^3 = 0 \quad (11)$$

avec

$$r = \frac{1}{R_{C_1} C_1}$$

$$\delta = \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} < 0$$

$$\lambda = \frac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} > 0$$

Le système est analogue à un oscillateur mécanique soumis à une force dérivant d'un potentiel en  $\frac{1}{2}\delta x^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4$ .

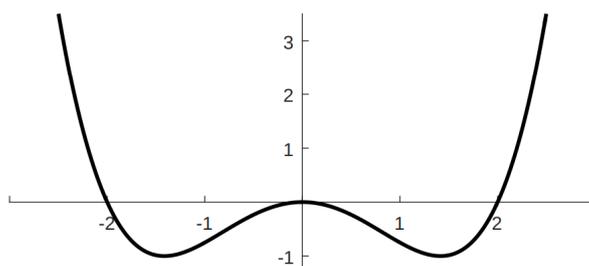


FIGURE 3 – Forme du potentiel.

#### Double-puits électronique

↗ Krob p178



Matériel :

- boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39
- $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ , et  $C_1 = C_2 = 3 \text{ }\mu\text{F}$

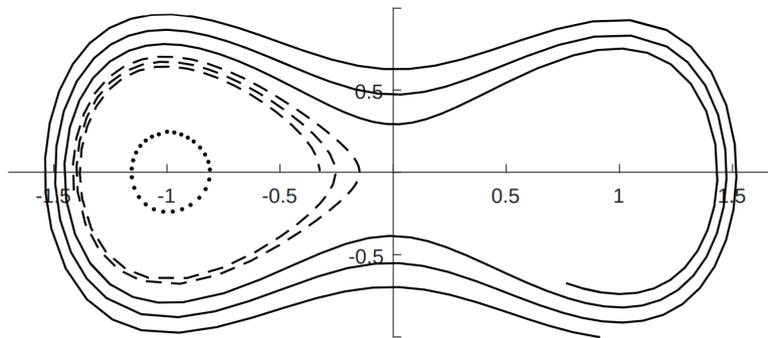
- boîte à décades de résistance  $R_{C_1}$
- oscilloscope
- carte d'acquisition + LatisPro

Réaliser le montage ci-dessus. Tracer le portrait de phase sur l'oscilloscope en mode XY.

On pourra commencer par un amortissement faible  $R_{C_1} = 1 \text{ M}\Omega$  et en court-circuitant l'entrée inverseuse du troisième AO en la reliant à la masse (condition initiale éloignée). On peut également court-circuiter la tension  $x$  pour partir d'une autre condition initiale. *L'utilisation du mode persistance de l'oscilloscope est de nouveau très utile.*

On peut ensuite modifier l'amortissement en modifiant  $R_{C_1}$ . La trajectoire est déterministe : on tombe dans le même puit si on garde les mêmes conditions initiales.

On peut également acquérir  $u$  et  $x$  sur LatisPro, ouvrir le circuit au niveau de  $R_{C_1}$  pour fortement réduire l'amortissement et court-circuiter l'entrée inverseuse du 3ème AO. Lancer une acquisition quand le système balaye chacun des trois états énoncés ci-dessous et tracer leur FFT pour observer l'évolution des harmoniques.



La trajectoire dans l'espace des phases passe par plusieurs états successifs :

- au-dessus des puits de potentiel, le système évolue périodiquement autour du double-puits  $\rightarrow$  *trait continu sur la figure*

Les oscillations du système sont anharmoniques mais symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Le spectre d'amplitude de  $x(t)$  ne contient que les harmoniques impairs.

- le système piégé dans un des puits ne peut plus en sortir  $\rightarrow$  *trait en tiret sur la figure*

Le système est loin de sa position d'équilibre *i.e.* le fond du puit et ses oscillations sont anharmoniques et asymétriques. Le spectre d'amplitude de  $x(t)$  ne contient que les harmoniques pairs et impairs.

- le système se rapproche de la position d'équilibre au fond du puit  $\rightarrow$  *trait pointillé sur la figure*

La trajectoire du système est quasi-elliptique. Ses oscillations sont alors quasi-sinusoïdales et son spectre n'a quasiment plus d'harmoniques.