

# SYNCHRONISATION DE DEUX OSCILLATEURS COUPLÉS

**Damien FLIELLER, Hervé MAGONI**

Equipe de Recherche en Génie Electrique,  
Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industrie de Strasbourg,  
24 boulevard de la Victoire 67084 Strasbourg Cedex.  
flieller@ensais2.u-strasbg.fr

## 1. INTRODUCTION

Tous les systèmes à comportement non linéaires qui fonctionnent à fréquence variable sont susceptibles de se synchroniser sur un signal extérieur. Le premier à avoir mis en évidence ce genre de phénomène est le physicien C. Huygens (Fig.1).

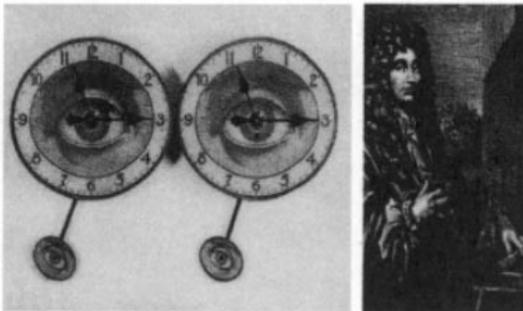


Fig.1 : Huygens et les horloges synchronisées.

En effet un jour de 1665, il observa et relata la synchronisation de deux horloges à balancier couplées par leur support commun. Cette synchronisation correspondait à un fonctionnement stable. Il tenta de perturber le mouvement d'un des balanciers et, en moins d'une demi-heure, ils redevenaient synchrones. Plus tard, en 1927, Van der Pol observa également de tels phénomènes sur un oscillateur électrique [VAN der POL 1927].

Pour montrer les phénomènes mis en jeu, nous avons réalisé un petit montage (Fig. 3) pour mettre en évidence la synchronisation dans le cas d'un exemple simple. En effet, l'étude des comportements de deux oscillateurs couplés est souvent difficile à cause des non linéarités qui rendent inefficaces les méthodes analytiques. Sur cet exemple simple, une formulation analytique est possible. Nous montrons en particulier les phénomènes de synchronisation et les mécanismes de perte de stabilité.

## 2. MONTAGE DE BASE

Le montage de base est constitué de deux amplificateurs opérationnels, le premier est monté en comparateur à hystérésis et le deuxième en intégrateur (Fig. 2).

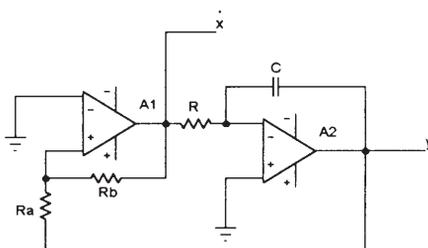


Fig. 2 : Schéma du générateur de signaux triangulaires et carrés.

La tension de saturation est  $\pm V_{sat}$ .

On note :

$$k = R_a / R_b \quad (1)$$

La fréquence des oscillations est donnée par la relation :

$$f = \frac{1}{2RC \cdot \ln(1 + 2k)} \quad (2)$$

Si  $k \ll 1$  alors la relation (2) s'écrit :

$$f = \frac{1}{4kRC} \quad (3)$$

En exprimant la sortie de l'intégrateur en fonction de la sortie du comparateur, on trouve :

$$y = -x / RC \quad (4)$$

En exprimant la sortie du comparateur en fonction de la sortie de l'intégrateur, on trouve :

$$\dot{x} = V_{sat} \cdot \text{sign}\left(k\dot{x} - \frac{1}{RC}x\right) \quad (5)$$

et en exprimant cette dernière relation en fonction de (3) :

$$\dot{x} = V_{sat} \cdot \text{sign}(x - 4f\dot{x}) \quad (6)$$

**3. MONTAGE GLOBAL**

Couplons maintenant les deux oscillateurs entre eux par l'intermédiaire des résistances  $R_{12}$  et  $R_{21}$  (Fig. 3). Les sorties  $y_1$  et  $y_2$  sont alors le résultat (7) de l'intégration des signaux  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  avec des constantes de temps données par (8).

On ne traitera que le cas  $R_1 > R_2$  car le montage est symétrique.

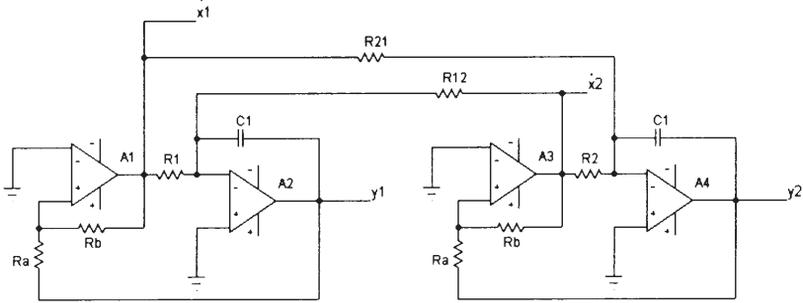


Fig. 3 : Schéma des multivibrateurs couplés par deux résistances  $R_{12}$  et  $R_{21}$ .

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -\left( \frac{x_1}{\tau_1} + \frac{x_2}{\tau_{12}} \right) \\
 y_2 &= -\left( \frac{x_2}{\tau_2} + \frac{x_1}{\tau_{21}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= R_1 C_1 \\
 \tau_{12} &= R_{12} C_1 \\
 \tau_2 &= R_2 C_1 \\
 \tau_{21} &= R_{21} C_1
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

avec :

Sous forme compacte nous avons finalement le modèle :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= V_{sat} \cdot \text{sign} \left[ \dot{x}_1 - 4f_1^0 \left( x_1 + \frac{\tau_1}{\tau_{12}} \cdot x_2 \right) \right] \\
 \dot{x}_2 &= V_{sat} \cdot \text{sign} \left[ \dot{x}_2 - 4f_2^0 \left( x_2 + \frac{\tau_2}{\tau_{21}} \cdot x_1 \right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

avec  $f_1^0 = \frac{1}{4k\tau_1}$  et  $f_2^0 = \frac{1}{4k\tau_2}$

Parmi tous les modes de fonctionnements que présente le montage de la Fig. 3, nous n'étudierons que le mode 1/1, lorsque les deux oscillateurs ont la même fréquence  $1/T$ .

Compte tenu des symétries du montage, les rapports cycliques de  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  valent  $1/2$ . Nous n'avons alors que 2 possibilités.

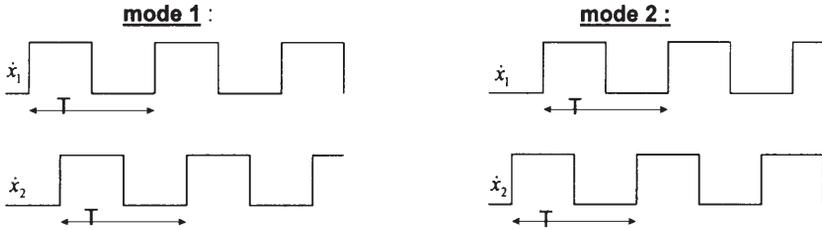


Fig. 4 : signaux caractérisant les modes 1 et 2.

Par la suite le **mode 1** sera le mode de fonctionnement lorsque  $\dot{x}_1$  est en avance sur  $\dot{x}_2$  et **mode 2** lorsque  $\dot{x}_1$  est en retard sur  $\dot{x}_2$  et  $T$  la période de  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  en régime permanent (cette période est bien sûr commune aux deux oscillateurs).

**4. ETUDE DU MODE 1**

Supposons que les deux oscillateurs soient synchronisés dans le mode 1. Nous avons donc le chronogramme de la Fig. 5 où sont également définis les instants de commutations qui interviennent dans une période complète  $T$ . Nous allons étudier le système au moyen d'équations récurrentes.

Soit  $t_n$  donné par le front montant de  $\dot{x}_1$  alors  $t_{n+1} = t_n + T$  est l'instant de fin de période. Entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  apparaissent 3 autres instants :  $t_n^1$ ,  $t_n^2$ ,  $t_n^3$  et en régime permanent  $t_n^2 = t_n + T$ ,  $t_n^3 = t_n^1 + T$ . On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à  $[t_n, t_n^2]$ . Ce qui donne une modélisation par intervalle :

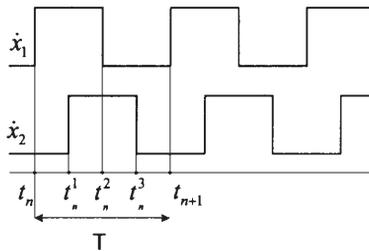


Fig. 5 : signaux caractérisant le mode 1.

En dérivant les équations (7) par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\left(\frac{\dot{x}_1}{\tau_1} + \frac{\dot{x}_2}{\tau_{12}}\right) \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\left(\frac{\dot{x}_2}{\tau_2} + \frac{\dot{x}_1}{\tau_{21}}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

de $t_n$ à $t_n^1$ :	de $t_n^1$ à $t_n^2$ :
$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = V_{sat} \cdot \left(\frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1}\right) \\ \frac{dy_2}{dt} = V_{sat} \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}\right) \end{cases} \tag{11}$	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = V_{sat} \cdot \left(-\frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1}\right) \\ \frac{dy_2}{dt} = V_{sat} \cdot \left(-\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}\right) \end{cases} \tag{12}$

Les instants de commutations sont définis par les relations suivantes :

$t_n$	$t_n^1$	$t_n^2$
$y_1(t_n) - V_{sat} = 0$	$y_2(t_n^1) - V_{sat} = 0$	$y_1(t_n^2) + V_{sat} = 0$

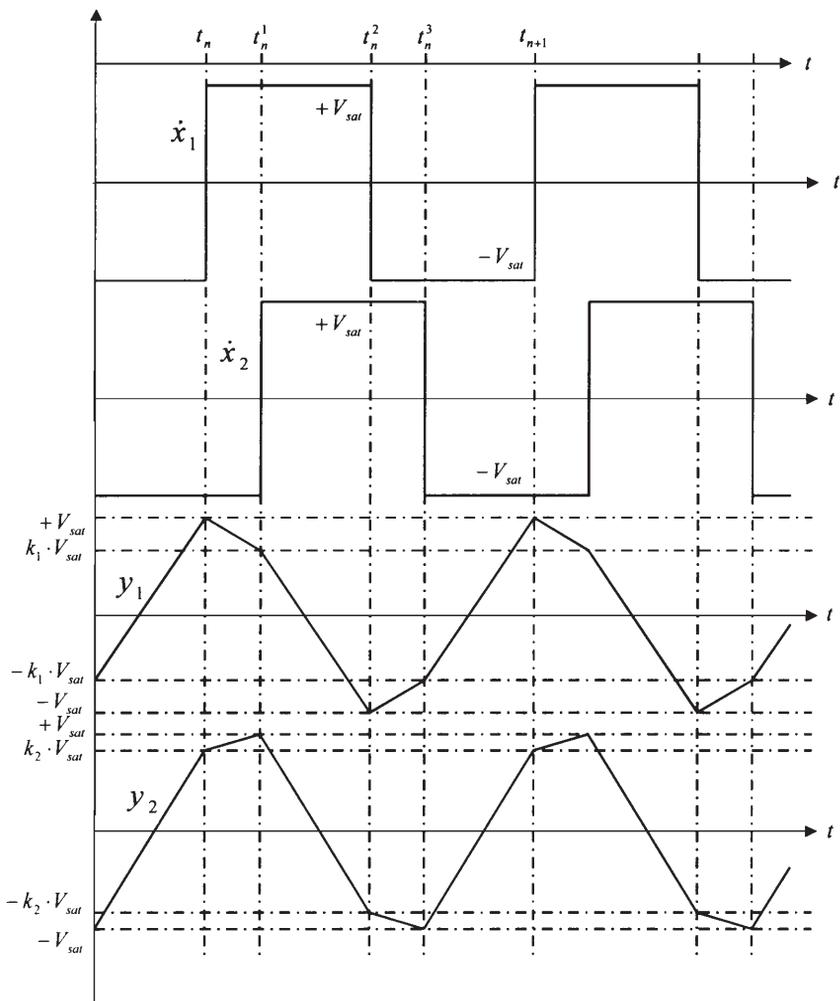


Fig. 6 : Signaux théoriques générés par les deux multivibrateurs couplés en mode 1.

Pour alléger les écritures posons :  $X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} y_1(t_n) \\ y_2(t_n) \end{pmatrix}$ ,

$$X_n^1 = \begin{pmatrix} y_1(t_n^1) \\ y_2(t_n^1) \end{pmatrix} \text{ et } X_n^2 = \begin{pmatrix} y_1(t_n^2) \\ y_2(t_n^2) \end{pmatrix}.$$

Les systèmes (11) et (12) s'intègrent et donnent (13) et (14).

$t \in [t_n; t_n^1]$	$t \in [t_n^1; t_n^2]$
$X = X_n + V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t - t_n) \quad (13)$	$X = X_n^1 - V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t - t_n^1) \quad (14)$

On obtient ainsi partant de  $X_n = \begin{pmatrix} V_{sat} \\ y_2(t_n) \end{pmatrix}$  :

$X_n^1 = X_n + V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t_n^1 - t_n) \quad (15)$	$X_n^2 = X_n^1 - V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t_n^2 - t_n^1) \quad (16)$
---	---

En remarquant que :  $X_n^1 = \begin{pmatrix} y_1(t_n^1) \\ V_{sat} \end{pmatrix}$  et  $X_n^2 = \begin{pmatrix} -V_{sat} \\ y_2(t_n^2) \end{pmatrix}$

Nous obtenons 4 équations pouvant donner les inconnues  $y_2(t_n^2)$ ,  $y_1(t_n^1)$ ,  $t_n^1$  et  $t_n^2$ .

$$\begin{cases} y_1(t_n^1) = V_{sat} + V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1} \right) \cdot t_n^1 \\ y_2(t_n^2) = V_{sat} - V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}} \right) \cdot (t_n^2 - t_n^1) \\ y_2(t_n) + V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \right) \cdot t_n^1 = V_{sat} \\ y_1(t_n^1) - V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \right) \cdot (t_n^2 - t_n^1) = -V_{sat} \end{cases} \quad (17)$$

Nous obtenons alors :

$$y_2(t_n^2) = F(y_2(t_n)) = V_{sat} (1 - 2\alpha_1 - \alpha_1\beta_1) + \alpha_1\beta_1 y_2(t_n), \quad t_n^1 = \frac{V_{sat} - y_2(t_n)}{V_{sat} \left( \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \right)} \quad (18)$$

$$\text{et} \quad t_n^2 = t_n^1 + \frac{2}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}}} + \frac{\frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1}}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}} \cdot \frac{V_{sat} - y_2(t_n)}{V_{sat} \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \right)} \quad (19)$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \left( \frac{\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}}}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}}} \right) \quad \text{et} \quad \beta_1 = \left( \frac{\frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1}}{\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}} \right)$$

#### 4.1 Etude du régime permanent

En régime permanent :  $y_2(t_n^2) = -y_2(t_n)$ .

$$\text{D'où : } y_2(t_n) = \frac{-V_{sat} (1 - 2\alpha_1 - \alpha_1\beta_1)}{1 + \alpha_1\beta_1} = V_{sat} \frac{-\frac{1}{\tau_1\tau_2} + \frac{1}{\tau_{12}\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_2\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}\tau_{21}}}{\frac{1}{\tau_2\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1\tau_{21}}} \quad (20)$$

On obtient également :

$$t_n^1 = \frac{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}}{\frac{1}{\tau_2\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1\tau_{21}}} \quad \text{et} \quad t_n^2 = \frac{2(\tau_{21} - \tau_{12})}{\tau_2 - \tau_1} \quad (21)$$

De là on obtient T, la période des signaux :

$$T = 4 \frac{\tau_{21} - \tau_{12}}{\tau_{21} - \tau_{12}} \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \quad (22)$$

**4.2 Frontières du mode 1**

Dans le plan paramétrique  $R_{21}, R_{12}$ , les frontières du mode 1 sont données par deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  qui donnent la limite  $t_n^1 = 0$  d'une part, et la perte de stabilité d'autre part.

La première frontière  $C_1$  est définie pour  $t_n^1 = 0$ , soit lorsque :

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \tag{23}$$

On est dans le mode 1 pour  $R_{12} < \frac{1}{\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}}$

Remarque : cette frontière passe par le point  $R_{12} = R_2$  et  $R_{21} = R_1$ .

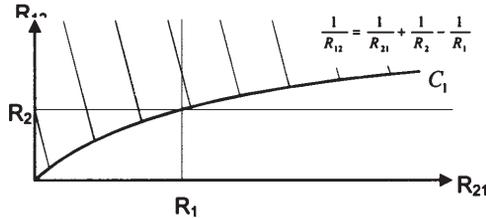


Fig. 7 : Frontière pour  $t_n^1 = 0$ .

**Etude de la stabilité de  $y_2(t_n^2)$**

Posons  $y_2(t_n^2) = F(y_2(t_n))$ .

Nous avons de même :  $y_2(t_{n+1}) = -F(-y_2(t_n^2))$ , soit écrit sous une autre forme :

$$y_2(t_{n+1}) = u + v \cdot y_2(t_n) \tag{24}$$

avec :  $u = -V_{sar}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_1\beta_1) - \alpha_1\beta_1 V_{sar}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_1\beta_1)$   
 $v = (\alpha_1\beta_1)^2$

La suite arithmético-géométrique (24) est stable si  $v < 1$  soit si  $|\alpha_1\beta_1| < 1$ , avec :

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{R_{21} + R_2}{R_{21} - R_2} \cdot \frac{R_1 - R_{12}}{R_1 + R_{12}}$$

Etude du signe de  $\alpha_1\beta_1$ .

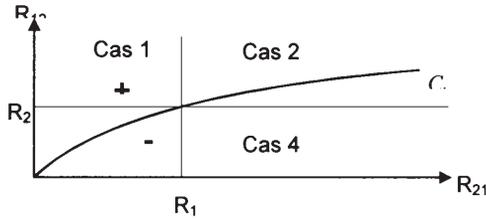


Fig. 8 : Etude du signe de  $\alpha_1\beta_1$  :

On remarque d'emblée que le cas 1 ne peut pas se produire parce qu'il concerne des points qui sont au-dessus de  $C_1$  et donc qui ne correspondent pas au mode 1.

Nous devons maintenant étudier 3 cas. Pour des raisons de symétrie du montage, les cas 2 et 3 sont équivalents puisque le signe  $\alpha_1\beta_1$  est le même.

Cas 2 ou cas 3 :  $\alpha_1\beta_1 < 0$

Le système est stable si  $-1 < \alpha_1\beta_1 < 0$ .

Soit si  $R_{12} < \frac{R_1 R_{21}}{R_2}$ .

La frontière  $R_{12} = \frac{R_1 R_{21}}{R_2}$  est la courbe  $C_3$ .

Cas 4 :  $\alpha_1\beta_1 > 0$

Le système est stable si  $0 < \alpha_1\beta_1 < 1$ .

Soit si  $R_{12} > \frac{R_1 R_2}{R_{21}}$ .

La frontière  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_{21}}$  est la courbe  $C_2$ .

**4.3 Conclusion**

Condition de stabilité :

Le mode 1 doit donc vérifier les 3 conditions résumées ici.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} < \frac{1}{\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \\ R_{12} < \frac{R_1 R_{21}}{R_2} \\ R_{12} > \frac{R_1 R_2}{R_{21}} \end{array} \right. \quad (25)$$

La zone non hachurée Fig. 9 caractérise le mode 1.

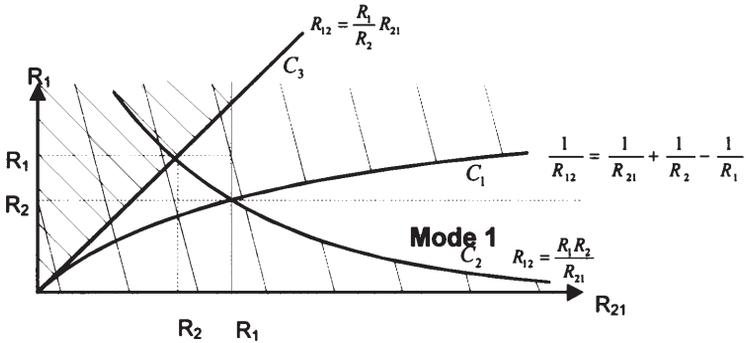


Fig. 9 : Frontières du mode 1.

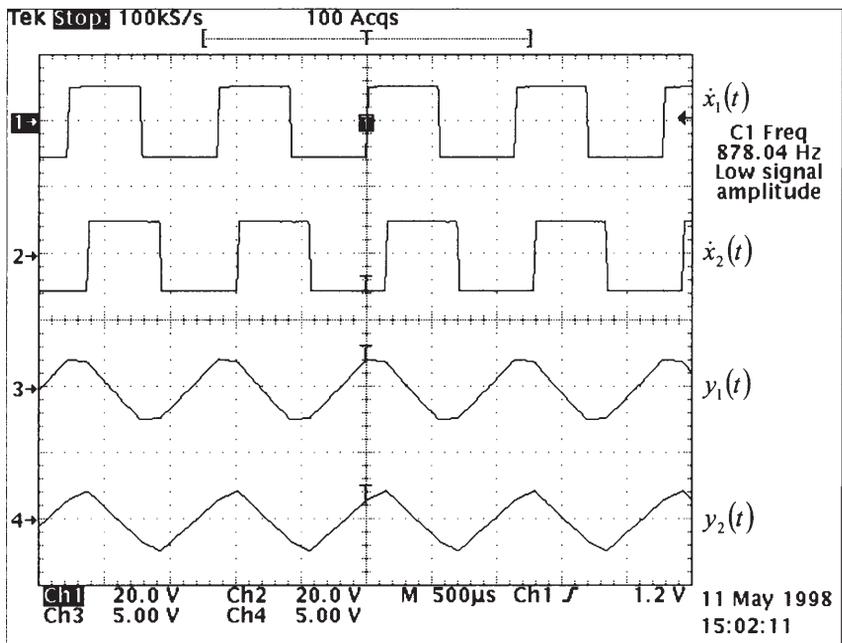


Fig. 10 : Signaux générés par les deux multivibrateurs couplés en mode 1 avec :  
 $R_1 = 8.2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{12} = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_{21} = 25\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_{\text{sat}} = 12\text{V}$ .

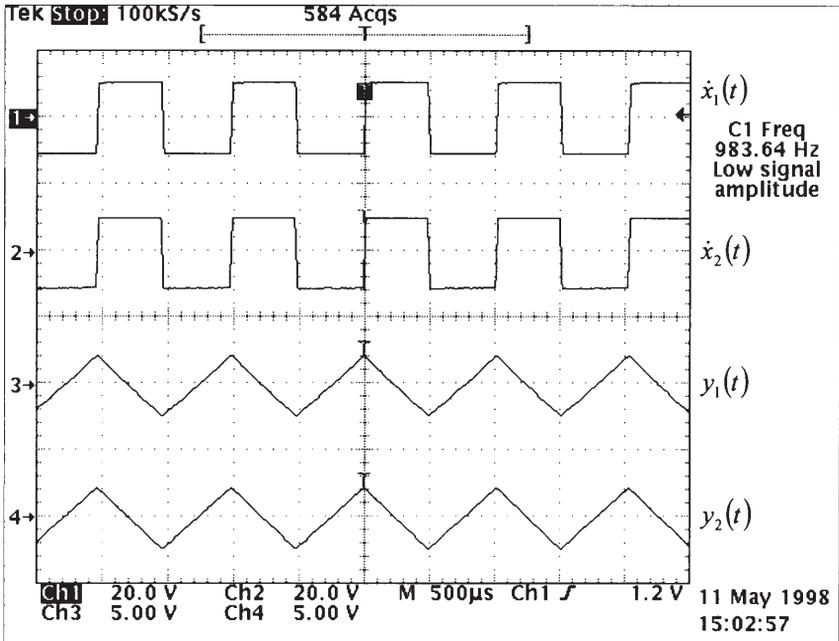


Fig. 11 : Limite de stabilité en mode 1 avec :  $R_1 = 8.2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{12} = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_{21} = 25\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_{\text{sat}} = 12\text{V}$ .

5. ETUDE DU MODE 2

Supposons que les deux oscillateurs soient synchronisés dans le mode 2.

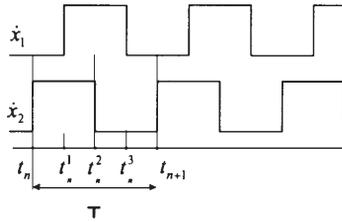


Fig. 12 : signaux caractérisant le mode 2.

A partir de (10), on obtient :

de $t_n$ à $t_n^1$ :	de $t_n^1$ à $t_n^2$ :
$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} \right) \\ \frac{dy_2}{dt} = V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2} \right) \end{cases} \quad (26)$	$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = V_{sat} \cdot \left( -\frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1} \right) \\ \frac{dy_2}{dt} = V_{sat} \cdot \left( -\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}} \right) \end{cases} \quad (27)$

Les instants de commutations sont définis par les relations suivantes :

$t_n$	$t_n^1$	$t_n^2$
$y_2(t_n) - V_{sat} = 0$	$y_1(t_n^1) - V_{sat} = 0$	$y_2(t_n^2) + V_{sat} = 0$

Les systèmes (26) et (27) s'intègrent et donnent (28) et (29).

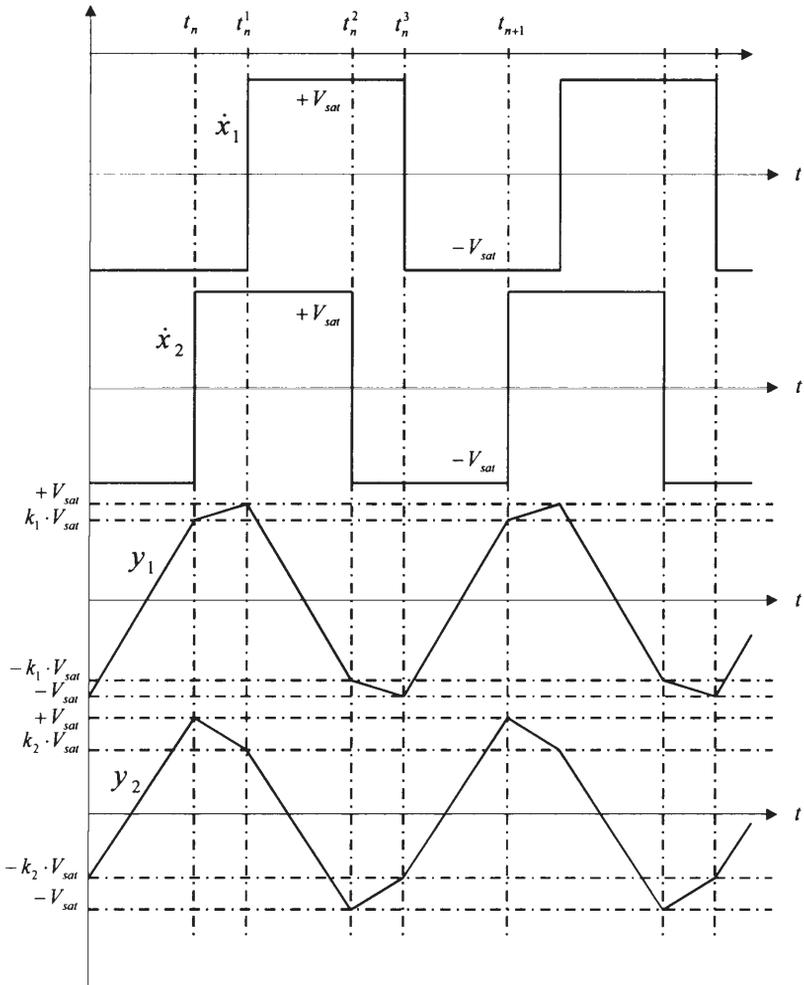


Fig. 13 : Signaux théoriques générés par les deux multivibrateurs couplés en mode 2.

$t \in [t_n; t_n^1]$	$t \in [t_n^1; t_n^2]$
$X = X_n + V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} \cdot (t - t_n) \quad (28)$	$X = X_n^1 - V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t - t_n^1) \quad (29)$

On obtient ainsi partant de  $X_n = \begin{pmatrix} y_1(t_n) \\ V_{sat} \end{pmatrix}$  :

$X_n^1 = X_n + V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} \cdot (t_n^1 - t_n) \quad (30)$	$X_n^2 = X_n^1 - V_{sat} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \\ \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}} \end{pmatrix} \cdot (t_n^2 - t_n^1) \quad (31)$
---	---

en remarquant que

$$X_n^1 = \begin{pmatrix} V_{sat} \\ y_2(t_n^1) \end{pmatrix} \text{ et } X_n^2 = \begin{pmatrix} y_1(t_n^2) \\ -V_{sat} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons 4 équations pouvant donner les inconnues  $y_1(t_n^2)$ ,  $y_2(t_n^1)$ ,  $t_n^1$  et  $t_n^2$ .

$$\begin{cases} y_2(t_n^1) = V_{sat} + V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2} \right) \cdot t_n^1 \\ y_1(t_n^2) = V_{sat} - V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \right) \cdot (t_n^2 - t_n^1) \\ y_1(t_n) + V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} \right) \cdot t_n^1 = V_{sat} \\ y_2(t_n^1) - V_{sat} \cdot \left( \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_2} \right) \cdot (t_n^2 - t_n^1) = -V_{sat} \end{cases} \quad (32)$$

Nous obtenons alors

$$y_1(t_n^2) = F(y_1(t_n)) = V_{sat} (1 - 2\alpha_2 - \alpha_2\beta_2) + \alpha_2\beta_2 y_1(t_n), \quad t_n^1 = \frac{V_{sat} - y_1(t_n)}{V_{sat} \left( \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}} \right)} \quad (33)$$

et 
$$t_n^2 = t_n^1 + \frac{2}{\frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_2}} + \frac{\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2}}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}}} \cdot \frac{V_{sat} - y_1(t_n)}{V_{sat} \left( \frac{1}{\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_2} \right)}$$
 (34)

avec  $\alpha_2 = \left( \frac{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}}}{\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_{21}}} \right)$  et  $\beta_2 = \left( \frac{\frac{1}{\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2}}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}}} \right)$

**5.1 Etude du régime permanent**

En régime permanent :  $y_1(t_n^2) = -y_1(t_n)$ .

D'où : 
$$y_1(t_n) = \frac{-V_{sat}(1 - 2\alpha_2 - \alpha_2\beta_2)}{1 + \alpha_2\beta_2} = V_{sat} \frac{-\frac{1}{\tau_1\tau_2} + \frac{1}{\tau_{12}\tau_{21}} + \frac{1}{\tau_1\tau_1} - \frac{1}{\tau_{12}\tau_{12}}}{\frac{1}{\tau_1\tau_{21}} - \frac{1}{\tau_2\tau_{12}}}$$
 (35)

On obtient également :

$$t_n^1 = \frac{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_{21}}}{\frac{1}{\tau_2\tau_{12}} - \frac{1}{\tau_1\tau_{21}}} \text{ et } t_n^2 = \frac{2(\tau_{12} - \tau_{21})}{\tau_1 - \tau_2}$$
 (36)

De là on obtient T, la période des signaux qui est identique à (22).

**5.2 Frontières du mode 2**

Dans le plan paramétrique  $R_{21} R_{12}$ , les frontières du mode 2 sont données par deux courbes  $C'_1$  et  $C'_2$  qui donnent la limite  $t_n^2 = 0$  d'une part, et la perte de stabilité d'autre part.

La première frontière  $C'_1$  est définie pour  $t_n^2 = 0$ , soit lorsque :

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$
 (37)

On est dans le mode 2 pour  $R_{12} > \frac{1}{\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$

Remarque : cette frontière passe par le point  $R_{12} = R_1$  et  $R_{21} = R_2$ .

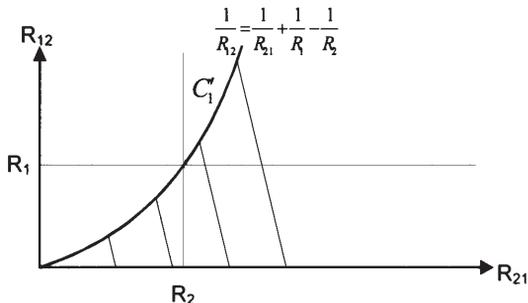


Fig. 14 : Frontière pour  $t_n^2 = 0$ .

**Etude de la stabilité de  $y_1(t_n^2)$**

Posons  $y_1(t_n^2) = G(y_1(t_n))$ .

Nous avons de même :  $y_1(t_{n+1}) = -G(-y_1(t_n^2))$ , soit écrit sous une autre forme :

$$y_1(t_{n+1}) = w + z \cdot y_1(t_n) \tag{38}$$

$$w = -V_{sat}(1 - 2\alpha_2 - \alpha_2\beta_2) - \alpha_2\beta_2V_{sat}(1 - 2\alpha_2 - \alpha_2\beta_2)$$

avec :  $z = (\alpha_2\beta_2)^2$

La suite arithmético-géométrique (38) est stable si  $|\alpha_2\beta_2| < 1$ , avec :

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{R_{12} + R_1}{R_{12} - R_1} \cdot \frac{R_2 - R_{21}}{R_2 + R_{21}} \tag{39}$$

**Etude du signe de  $\alpha_2\beta_2$**

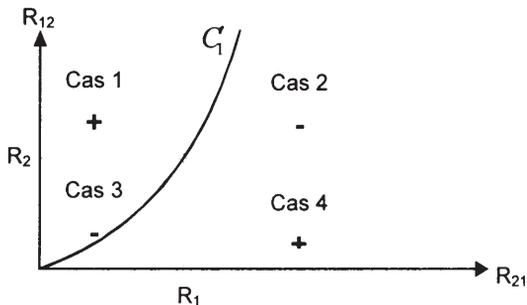


Fig. 15 : Etude du signe de  $\alpha_2\beta_2$ .

On remarque d'emblée que le cas 4 ne peut pas se produire parce qu'il concerne des points qui sont au-dessus de  $C'_1$  et donc qui ne correspondent pas au mode 2.

Nous devons maintenant étudier 3 cas. Pour des raisons de symétrie du montage, les cas 2 et 3 sont équivalents puisque le signe  $\alpha_2\beta_2$  est le même.

Cas 1 :  $\alpha_2\beta_2 > 0$

Le système est stable si  $0 < \alpha_2\beta_2 < 1$ .

Soit  $R_{12} < \frac{R_1 R_2}{R_{21}}$ .

La frontière  $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_{21}}$  est la courbe  $C'_2$ .

Cas 2 ou cas 3 :

Le système est stable si  $-1 < \alpha_2\beta_2 < 0$ .

Soit si  $R_{12} > \frac{R_2 R_{21}}{R_1}$ .

La frontière  $R_{12} = \frac{R_2 R_{21}}{R_1}$  est la courbe  $C'_3$ .

**5.3 Conclusion**

Condition de stabilité :

Le mode 2 doit donc vérifier les 3 conditions résumées ici.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{12} > \frac{1}{\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \\ R_{12} > \frac{R_2 R_{21}}{R_1} \\ R_{12} < \frac{R_1 R_2}{R_{21}} \end{array} \right. \quad (40)$$

La zone non hachurée Fig. 16 caractérise le mode 2.

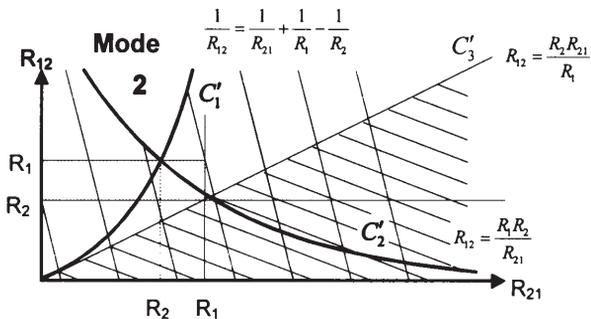


Fig. 16 : Frontières du mode 2.

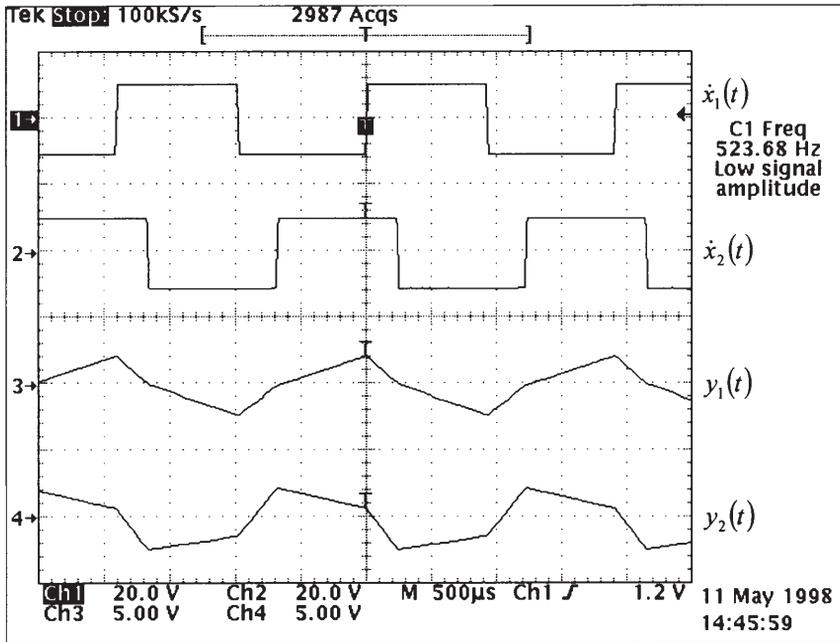


Fig. 17 : Signaux générés par les deux multivibrateurs couplés en mode 2 avec :  $R_1 = 8.2\text{k}\Omega$ ,  
 $R_2 = 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{12} = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_{21} = 9\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_{\text{sat}} = 12\text{V}$ .

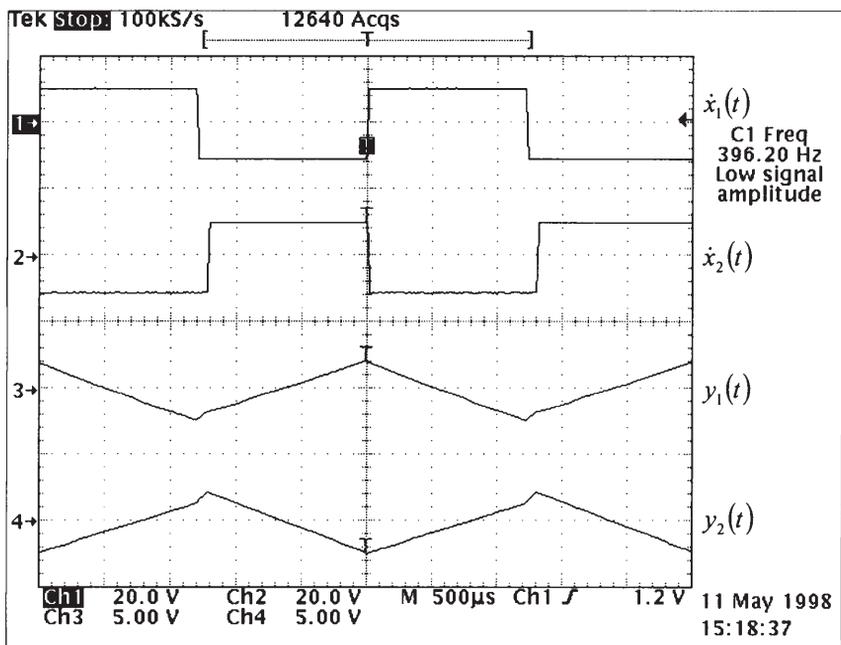


Fig. 18 : Limite de stabilité en mode 2 avec :  $R_1 = 8.2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{12} = 10\text{k}\Omega$ ,  
 $R_{21} = 25\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_{\text{sat}} = 12\text{V}$ .

## 6. GRAPHES REPRÉSENTANTS LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES DEUX MULTIVIBRATEURS COUPLÉS

### 6.1 Graphe expérimental représentant le comportement dynamique de deux multivibrateurs couplés avec $R_1$ et $R_2$ . quelconques

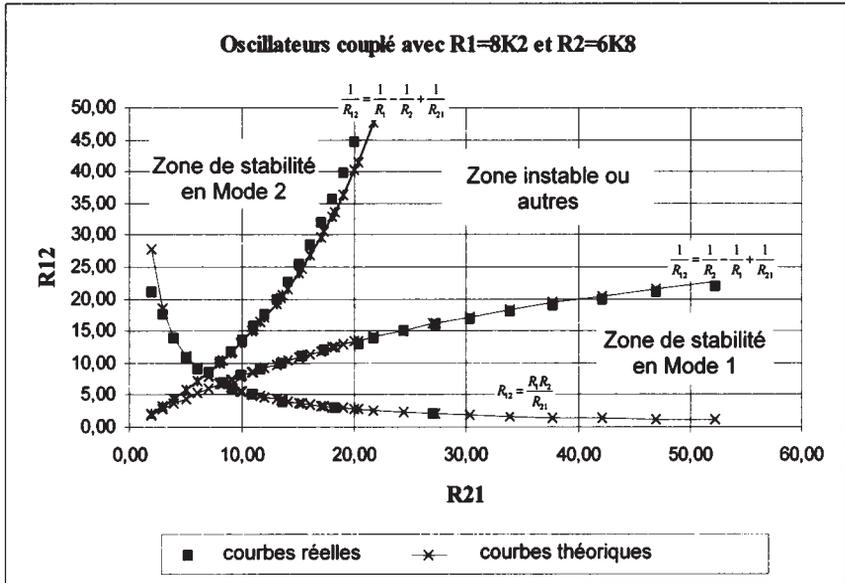


Fig. 19 : Multivibrateurs couplés avec  $R_1 = 8.2k\Omega$  et  $R_2 = 6.8 k\Omega$ ,  $V_{sat} = 12V$ .

## 6.2 Graphe expérimental agrandissant la zone de basculement entre les modes 1 et 2

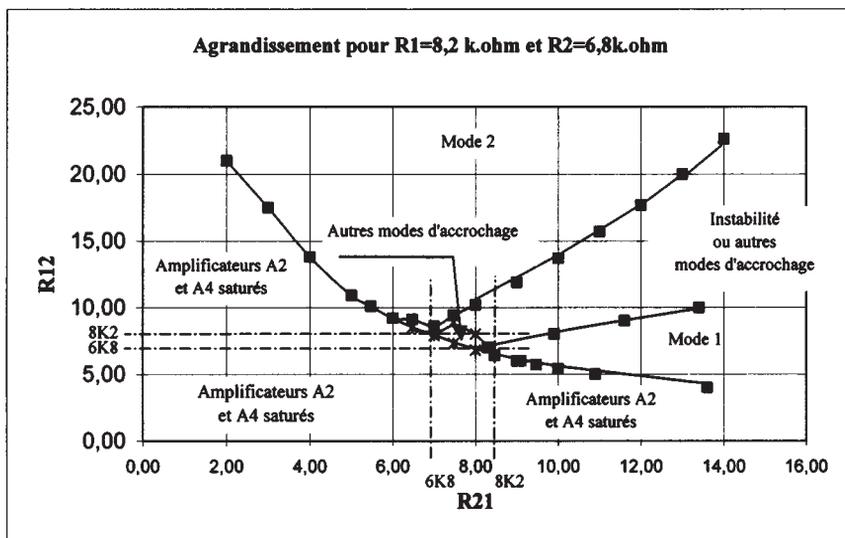


Fig. 20 : Agrandissement d'une zone de la Fig. 19.

Nota: l'aire "Amplificateurs A2 et A4 saturés", caractérise une zone instable.

Les suites géométriques (23) et (37) sont divergentes et dans cette configuration, nous avons  $|\alpha_1 \beta_1| > 1$  et  $|\alpha_2 \beta_2| > 1$ .

**6.3 Relevé caractérisant le passage d'un état stable en mode 2 à un état où les Amplificateurs A2 ou A4 sont saturés.**

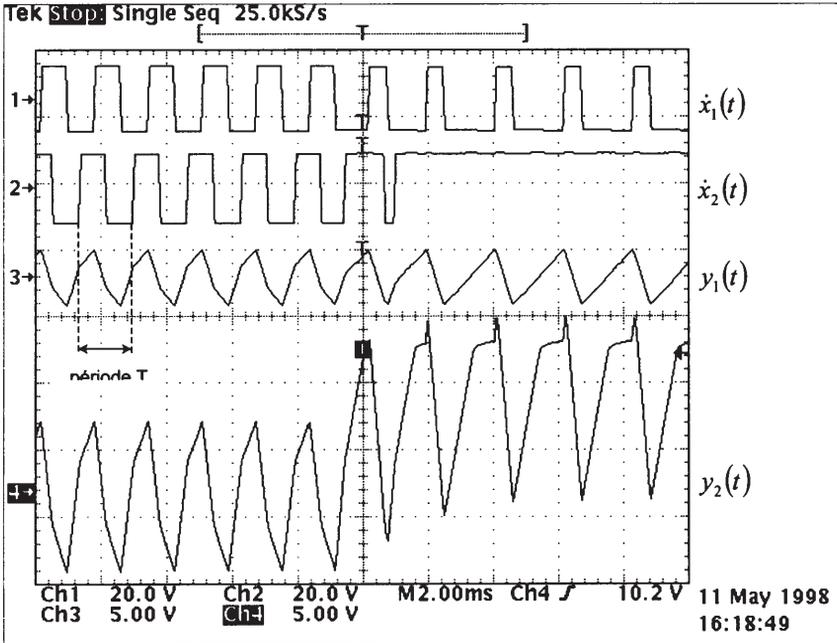


Fig. 21 : Signaux générés par les deux multivibrateurs initialement couplés en mode 2 où A4 tend vers la saturation avec :  $R_1 = 8.2\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 6.8\text{k}\Omega$ ,  $R_{12} = 20\text{k}\Omega$ ,  $3\text{k}\Omega > R_{21} > 2\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ,  $V_{\text{sat}} = 12\text{V}$ .

## 6.4 Relevé caractérisant un état instable du montage.

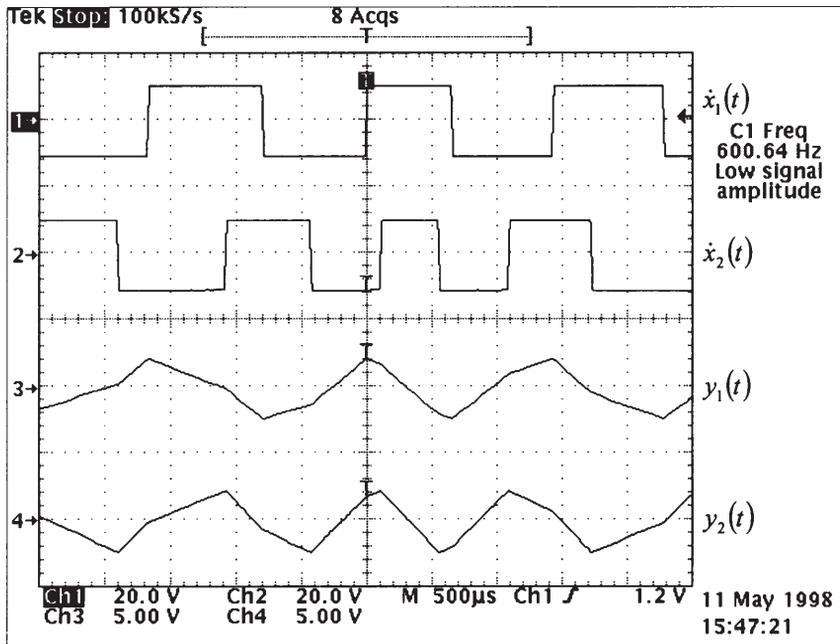


Fig. 22 : Signaux générés par les deux multivibrateurs en fonctionnement instable avec :

$$R_1 = 8.2\text{k}\Omega, R_2 = 6.8\text{k}\Omega, R_{12} = 20\text{k}\Omega, R_{21} = 17\text{k}\Omega, C = 1\mu\text{F}, V_{\text{sat}} = 12\text{V}.$$

### 6.5 Cas particulier où $R_1=R_2$

Les relations (23) et (37) valent désormais :

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_{21}} = \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$$

soit  $R_{12} = R_{21}$  ;  $C_1$  est alors confondue avec  $C_1'$ .

**Conclusion:** la zone de fonctionnement en mode 1 est maintenant séparée de la zone de fonctionnement en mode 2 par une droite d'équation  $R_1 = R_2$ .

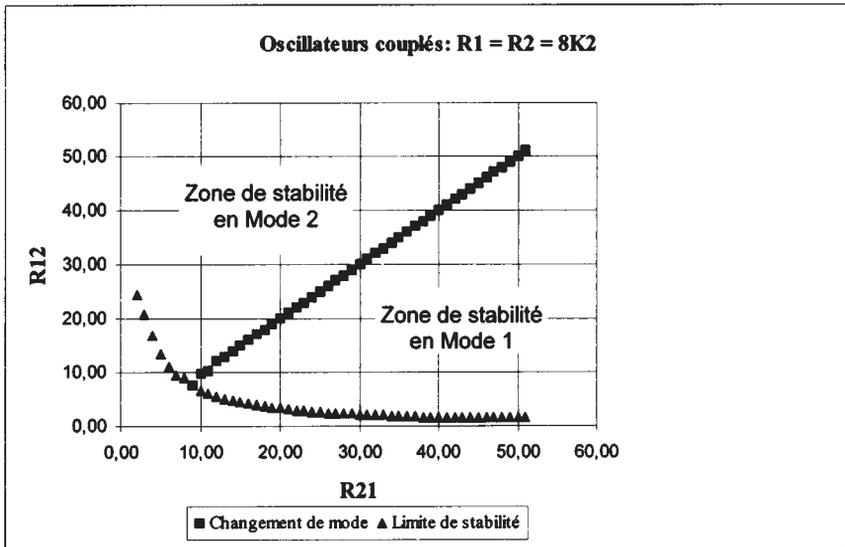


Fig. 23 : Graphe expérimental représentant le comportement dynamique de deux multivibrateurs couplés avec  $R_1 = R_2$ ,  $C = 1\mu F$ ,  $V_{sat} = 12V$ .

## 7. CONCLUSION

Nous avons étudié les phénomènes de synchronisation de deux oscillateurs et les mécanismes de perte de stabilité sans introduire d'approximation dans notre approche analytique.

Lorsque le montage est stable, une variation des résistances de couplages modifie la fréquence des signaux de sortie ainsi que leur déphasage. Tous les résultats théoriques ont été validés expérimentalement.

Nous avons observé d'autres modes de synchronisation que ceux étudiés dans cette partie et nous pensons qu'ils sont dus aux imperfections des amplificateurs opérationnels. En dehors des zones stables, ce montage a un comportement complexe.

## 8. BIBLIOGRAPHIE

[FLIELLER 1995] FLIELLER D., : *Etude de Systèmes Electrotechniques Non Linéaires Echantillonnés. Application à la Modélisation et à la Commande de Machine à Réductance Variable à Double Saillance*, Thèse de Doctorat, Université de Paris 6, 1995.

[STROGATZ 1995] STROGATZ S., STEWART I., Oscillateurs couplés et synchronisation biologique, *Pour la Science*, pp.114-120, jan 1995.

[VAN der POL 1927] VAN der POL, VAN der MARK : *Nature* 120, pp. 363-364, 1927.

[BELAIR 1986] BELAIR J., *J. Math. Biol.*, 24, pp. 217-232, 1986.

[ALLEN 1983] ALLEN T., *Physica 6D*, pp. 305-320, 1983.

[TORREY 1991] TORREY and LANG J.H., *IEE Pr-B*, Vol. 138, No. 1, pp1-14, Jan. 1991.