

MP32 – COUPLAGE DES OSCILLATEURS

21 avril 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Commentaires du jury

- 2014 à 2017 : Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples, et les candidats doivent en tirer les conclusions qui s'imposent. Les expériences de couplage inductif sont souvent difficiles à exploiter car les candidats ne maîtrisent pas la valeur de la constante de couplage. Enfin, il n'est pas interdit d'utiliser plus de deux oscillateurs dans ce montage, ou d'envisager des couplages non linéaires, qui conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, et ont de nombreuses applications.
Jusqu'en 2013, le titre était : Oscillateurs couplés
- 2013 : Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples. Enfin, les couplages non linéaires conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, qui ont de nombreuses applications.
- 2011 : Le jury met en garde les candidats contre l'utilisation de dispositifs dont la modélisation n'est pas comprise.
- 2010 : Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples. D'autre part, il faut réaliser le montage correspondant aux équations que l'on écrit (ou l'inverse), sinon l'interprétation n'est pas correcte. Enfin, les couplages non-linéaires conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, qui ont de nombreuses applications.
- 2004 : L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.

Bibliographie

↗ *Physique expérimentale*, **FLTCD**

↗ *BUP 815 (2)*

↗ *H-prépa Ondes PC*, **Brébec**

→ Couplage mécanique

→ Couplage non linéaire, http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/article-bup.php?ID_fiche=7633

→ Mise en équation des pendules couplés

Expériences



Table des matières

1	RLC couplés	2
1.1	Oscillateur seul	2
1.2	Oscillateurs couplés	3
2	Pendules couplés en torsion	4
2.1	Constante de couplage	4
2.2	Indépendance des modes	6
3	Masses couplées par un ressort	6
3.1	Théorie	6
3.2	Mise en place avec 4 masses	7
3.3	Dépendance en le nombre de masses	7
3.4	Généralisation à la corde de Melde	7
4	Couplage de deux oscillateurs à relaxation	8
4.1	Présentation de l'oscillateur à relaxation	8
4.2	Couplage non linéaire de deux oscillateurs à relaxation	8

Introduction

Le phénomène d'oscillation est une variation périodique d'un système physique autour d'un point d'équilibre. Il correspond à de nombreux exemples simples (masse accrochée au bout d'un ressort, pendule simple, oscillateur harmonique quantique pour la vibration d'une liaison covalente...), facilement caractérisables par leur fréquence propre f_0 . Pour autant, un oscillateur est rarement isolé : si on reprend l'exemple de la liaison covalente, on se doute que les vibrations de toutes les liaisons covalentes présentes dans une molécule ne sont pas indépendantes et interagissent les unes avec les autres. On parle alors d'oscillateurs couplés.

Intro : Couplage de deux métronomes



⊖ 1mn

Mettre deux métronomes pas en phase sur une planche, elle même posée sur deux canettes qui roulent.

Les oscillateurs se synchronisent. On peut aussi voir qu'il y a un mode antisymétrique si on l'excite convenablement.

Lorsque les deux métronomes ne sont pas couplés, ils évoluent librement et possèdent chacun une même fréquence propre f_0 s'ils sont supposés identiques. En revanche, si on les lie maintenant par une tige, les deux pendules se couplent et la fréquence globale du système est modifiée et n'a aucune raison de valoir f_0 . Le but de ce montage est d'étudier quels sont les différents couplages possibles entre N oscillateurs, et de voir comment le couplage influe sur les propriétés du nouveau système. Commençons simplement en regardant le couplage de deux circuits RLC en électricité.

1 RLC couplés

Ce couplage est intéressant car on contrôle facilement son intensité : il suffit d'utiliser une boîte à décades de capacités pour en changer la valeur.

1.1 Oscillateur seul

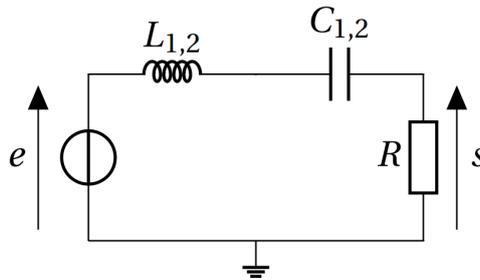


FIGURE 1 – Schéma du circuit RLC simple. On a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = e(t) \quad (1)$$

Si on a une entrée sinusoïdale de fréquence f_0 , on a un transfert maximal.

1.2 Oscillateurs couplés

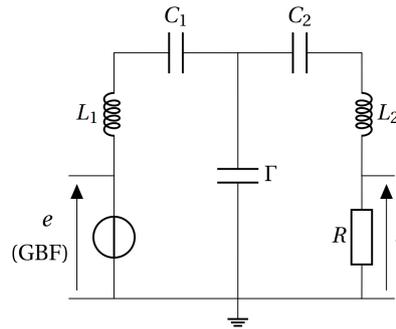


FIGURE 2 – Deux oscillateurs couplés par une capacité variable Γ . On enlève la résistance du premier aussi, parce que ça marche mieux. On excite ici le mode anti.

On prend cet oscillateur et on le couple à un deuxième de son espèce ¹.

Dans ce cas là, en supposant les deux RLC identiques, on a deux fréquences de résonance qui apparaissent, l'une pour l'excitation en phase et l'autre en opposition de phase.

$$\begin{cases} \omega_s^2 &= \frac{1}{LC} \\ \omega_a^2 &= \frac{1}{LC} (1 + 2\frac{C}{\Gamma}) \end{cases} \quad (2)$$

Accordage des RLC



⊖ 3mn

Commencer par construire deux circuits RLC série :

le premier composé d'une bobine L_1 d'environ 10mH, d'un condensateur C_1 d'environ 10nF et d'une résistance $R = 50\Omega$; et le second d'une bobine L_2 d'environ 10mH, d'une boîte à décades pour C_2 et d'une résistance $R = 50\Omega$. On peut les faire sur deux plaquettes différentes pour clarifier le montage.

Appliquer au circuit 1 une tension sinusoïdale 1 V et 10 kHz avec un GBF. Observer à l'oscilloscope la tension excitatrice e et la tension aux bornes de la résistance s en mode XY. Faire varier la fréquence de telle sorte à avoir une droite en XY. On est alors à la résonance (puisque la phase de la fonction de transfert est nulle à la résonance, méthode de Lissajou), mesurer cette fréquence.

Ne pas changer la fréquence. Alimenter le circuit 2 à la place du circuit 1. Faire varier la capacité pour obtenir à nouveau une droite en XY. Les deux oscillateurs sont accordés et on a alors $L_1C_1 = L_2C_2$.

Couplage des oscillateurs



⊖ 3mn

Coupler les deux circuits RLC comme montré ci-dessus via une boîte à capacités Γ . Utiliser la méthode de la réponse indicielle pour mesurer $s(t)$: envoyer un créneau de fréquence 10Hz en entrée avec une rampe de 4V et acquérir le signal sur Latispro avec un trigger à 100mV. Lisser, dériver et faire la TF du signal obtenu pour obtenir le spectre en fréquence et identifier les deux fréquences propres du système f_a et f_s . Répéter la mesure pour des valeurs de Γ entre 5 et 50nF et tracer $\omega_{a,s}$ en fonction de Γ . On s'attend à trouver deux courbes respectivement de pente nulle et de pente $2/L$.

ATTENTION : La mesure présente de nombreuses incertitudes. En effet, les deux circuits RLC sont supposés identiques, ce qui n'est jamais le cas en réalité. Les deux pics possèdent également leur propre largeur entre autre à cause du facteur de qualité de chacun des circuits. Enfin, la résolution fréquentielle sur Latispro est **DEGUEULASSE** (Satan ce logiciel) : la distance entre deux pics est au mieux de 500Hz, c'est pourquoi les valeurs de $f_{a,s}$ peuvent fortement varier d'une mesure à l'autre. Essayez de régler au mieux les temps d'acquisition (2000 points pour un temps de mesure de 1μs et un temps total d'acquisition de 2s à l'air de marcher), mais ne vous attendez pas à un miracle non plus.

1. Ca fait des bébés RLC ?

On observe bien que l'on n'a plus des pseudo-périodes en guise de réponse indicielle mais un signal plus compliqué, typique de l'addition de deux sinusoides. On relève bien deux pulsations propres différentes, signe que le système couplé est à deux degrés de liberté. Le couplage éloigne les pulsations propres.

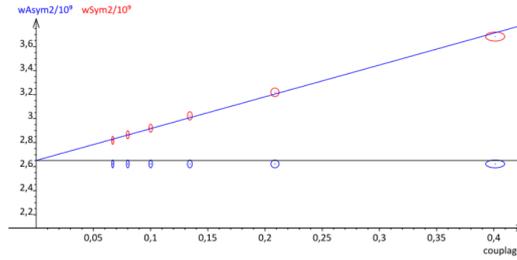


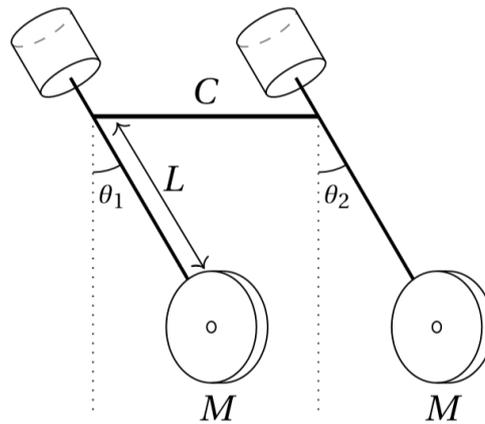
FIGURE 3 – Y'a une erreur ici, les deux ω sont inversées.

Il est possible de réaliser un analogue plus visuel, et peut-être préférable d'ailleurs...

2 Pendules couplés en torsion

✎ *H-prépa*

On étudie le dispositif P79.21, constitué de deux pendules pesants accordés et couplés via un fil de torsion.



2.1 Constante de couplage

On applique le TMC aux deux pendules pour obtenir :

$$\begin{cases} (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_1 + MgL \sin \theta_1 = C(\theta_2 - \theta_1) \\ (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_2 + MgL \sin \theta_2 = C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (3)$$

L'approximation des petits angles permet de simplifier ces équations :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = \frac{C}{J_0 + ML^2} (\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2 \theta_2 = \frac{C}{J_0 + ML^2} (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (4)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ la pulsation propre des pendules isolés.

Si on s'amuse à chercher des solutions harmoniques à ces équations, on aboutit à deux solutions :

- un mode symétrique de pulsation

$$\omega_s = \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$$

- un mode antisymétrique de pulsation

$$\omega_{as} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J_0 + ML^2}} = \sqrt{\frac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2}}$$

Équilibrage des pendules



Ces pendules devraient être en théorie équilibrés dynamiquement mais en pratique on les équilibrera de façon statique. Pour ce faire, s'assurer que les pendules soient découplés, et ne laisser qu'une masselotte vissée en haut de la tige de chaque pendule. Pour chaque pendule, ajuster la position de la masselotte pour qu'à chaque angle il soit dans une position d'équilibre.

Une fois les masselottes bien placées, ne plus y toucher et coupler à nouveau les pendules.

Remarques

- On pourrait mesurer J_0 en mesurant ω_0 pour un pendule isolé. On ne le fait pas ici dans ce montage.
- Un équilibrage parfait est très difficile à obtenir.

Étalonnage des capteurs



Cet étalonnage n'est pas nécessaire si on ne cherche qu'à mesurer des pulsations. Après, si on veut avoir de belles courbes sans risquer d'avoir d'offsets, on peut quand même étalonner les capteurs.

Pour ce faire, relier les pendules aux capteurs potentiométriques (boîtier blanc) et l'alimenter avec le boîtier P42.39.

Placer le gain au maximum pour chaque pendule, puis régler les zéros pour que la position verticale de la tige corresponde à des tensions nulles en sortie du capteur que l'on mesure au multimètre.

Pour le capteur de chaque pendule, mesurer la tension U_i pour différents angles θ_i et faire une régression linéaire. On obtient ainsi le coefficient de proportionnalité.

Pendules couplés en torsion

🔧 Notice du dispositif

🕒 10 min

Ajouter une masse M à une distance L de l'axe de rotation de chaque pendule (identique pour les 2 pendules).

Brancher les capteurs du potentiomètre sur synchronie. Lancer les pendules à des angles initiaux différents ($\theta_1 = 0, \theta_2 \neq 0$) afin d'exciter les deux modes. Lancer une acquisition pendant 2 minutes.

Faire la FFT du signal acquis et en déduire ω_s et ω_{as} .

Répéter l'opération pour plusieurs L et tracer $\frac{1}{\omega_{as}^2 - \omega_s^2} = f(L^2)$. On obtient une droite de pente $\frac{M}{2C}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{J_0}{2C}$. En déduire J_0 et C .

Remarque

- On peut relier C et module de cisaillement G et donc au module d'Young E de la tige de diamètre D :

$$C = \frac{G \pi D^4}{L \cdot 32} \quad \text{où} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

- On peut également mesurer C en immobilisant un pendule et en étudiant les oscillations de l'autre pendule. En effet, l'ordonnée à l'origine de la droite $(J_0 + ML^2)\omega^2 = f(L)$ est bien C .

2.2 Indépendance des modes



Indépendance des modes

☞ ☹

Lancer un acquisition où les pendules ont le même angle initial $\theta_1 = \theta_2$. On n'excite que le mode symétrique. Faire la FFT du signal pour constater qu'on a qu'un seul pic à ω_s .

Faire de même pour $\theta_1 = -\theta_2$. On n'excite que le mode antisymétrique. Refaire un FFT : on n'a de nouveau qu'un seul pic à ω_{as} .

Les deux modes ne s'échangent donc pas d'énergie : si un seul mode est excité initialement, alors ça restera le cas tout le temps. Il s'agit d'une propriété général des oscillateurs **linéairement** couplés.

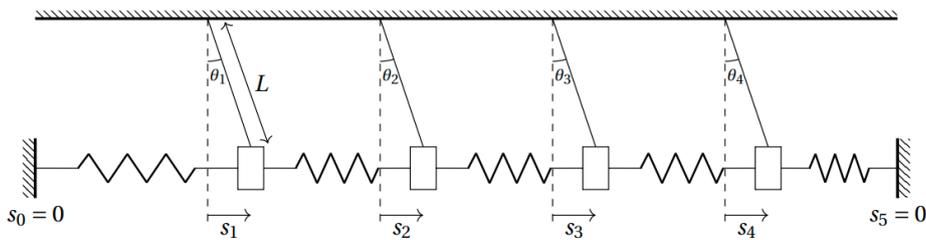
Il se passe quoi si on met N oscillateurs ?

3 Masses couplées par un ressort

3.1 Théorie

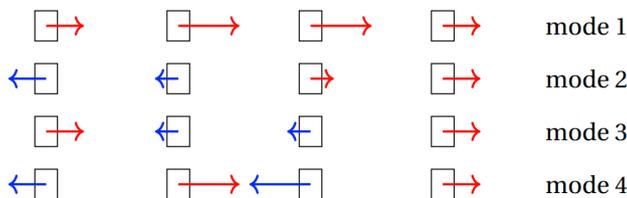
Théorème : N Oscillateurs $\iff N$ fréquences propres.

Si c'est vrai pour 2 et 4, c'est vrai pour tout N non ?



Théorie : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$. 4 pulsations ω_i :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_4 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\Omega_1^2} \end{cases}$$



Généralisation

On peut montrer que pour N oscillateurs on a :

$$\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$$

3.2 Mise en place avec 4 masses



Système de 4 pendules couplés



On sort le gros dispositif, avec la caméra et le logiciel Vidéocom. Le réglage est fastidieux, mais une fois que ça marche on est heureux, ça fait tout tout seul. Dans le menu Réglage et l'onglet Généralités indiquer le raccordement choisi (USB) dans Raccord Série, puis dans l'onglet Spécifications sélectionner la période d'échantillonnage Δt la plus basse possible.

Si le poids des masses du système P79.22 n'est pas indiqué, les peser, puis calculer la masse moyenne M . Mesurer la constante de raideur moyenne k des ressorts du système en suspendant des masselottes et en mesurant leurs allongements relatifs. Mesurer la longueur L des pendules formés.

Expérimentalement, nous obtenons : $M \simeq 323$ g, $k \simeq 115$ N/m et $L \simeq 33$ cm.

Tracer les FFT des courbes obtenues : avec un clic droit sélectionner Calcul FFT, puis surligner l'enregistrement d'une masse. Mesurer les fréquences propres obtenues.

Recommencer plusieurs fois l'expérience précédente en partant à chaque fois d'une condition initiale où la position des masses correspond à un mode propre. Tracer la FFT des courbes, et observer que l'amplitude du mode correspondant est plus importante que les autres.

Remarques :

- Le temps d'acquisition sur lequel est réalisé la FFT doit être judicieusement choisi pour bien mesurer les fréquences propres du système. Il faut trouver un compromis entre un temps suffisamment long pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, mais suffisamment faible pour éviter l'amortissement dû aux non-linéarités qui provoque un élargissement des pics.
- Pour une condition initiale quelconque, on retrouve une superposition des quatre modes propres du système. Les trois premiers modes sont habituellement assez faciles à détecter, contrairement au quatrième dont l'amplitude est assez faible. On peut donner plus d'amplitude à un mode propre particulier en utilisant une condition initiale proche de son vecteur propre.
- le départ en bruit blanc, obtenu en tapant une masse au marteau, permet de tout exciter uniformément. C'est une bonne solution.

3.3 Dépendance en le nombre de masses



Évolution avec le nombre de masses



En réduisant le nombre de masses constituant le système, on modifie les modes propres. Fixer la position d'une masse à l'extrémité du système en la maintenant à l'aide d'un statif et d'une pince. Enregistrer les oscillations libres des masses restantes pour une condition initiale quelconque, puis tracer la FFT des courbes et mesurer les 3 pulsations propres du système.

Fixer la seconde masse, et recommencer l'expérience puis fixer la troisième masse, et recommencer l'expérience.

Superposer sur une même courbe toutes les mesures de ω en fonction de $\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$. On trace ω^2 en fonction de K , cela donne une droite normalement !

Remonter à ω_0 et ω_1 .

Incertitudes : $\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$, on pose $K = 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$, et on a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + K\omega_1^2}$

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega} \sqrt{(\omega_0 u(\omega_0))^2 + (K\omega_1 u(\omega_1))^2} \quad (5)$$

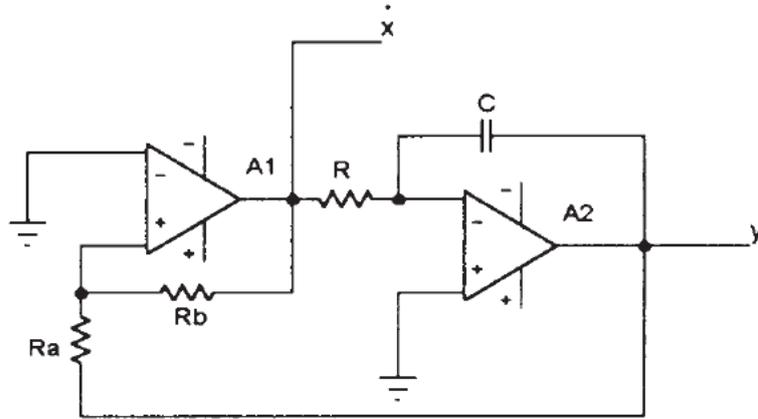
3.4 Généralisation à la corde de Melde

On peut faire une corde de Melde et dire que "waaaa on a une infinité de modes parce qu'on a une infinité d'oscillateurs et de degrés de liberté."

4 Couplage de deux oscillateurs à relaxation

➤ BUP 815 (dont sont tirées les figures)

4.1 Présentation de l'oscillateur à relaxation



L'oscillateur à relaxation est constitué de 2 AO : le premier est un comparateur à hystérésis et le second est intégrateur inverseur. C'est également un multivibrateur astable.

La tension de saturation des AO est $\pm V_{\text{sat}}$. On note également $k = \frac{R_a}{R_b}$. Les oscillations ont une fréquence

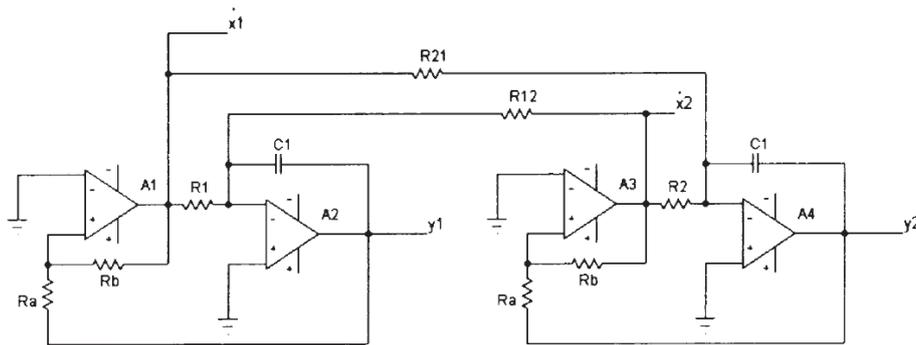
$$f_0 = \frac{1}{2RC \ln(1 + 2k)} \simeq \frac{1}{4kRC} \quad \text{si } k \ll 1$$

La sortie de l'intégrateur est donnée par $y = -\frac{x}{RC}$, on obtient donc pour la sortie du comparateur

$$\dot{x} = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign} \left(k\dot{x} - \frac{x}{RC} \right) = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign} (\dot{x} - 4f_0 x) \quad (6)$$

On comprend ainsi que l'oscillateur n'est pas linéaire.

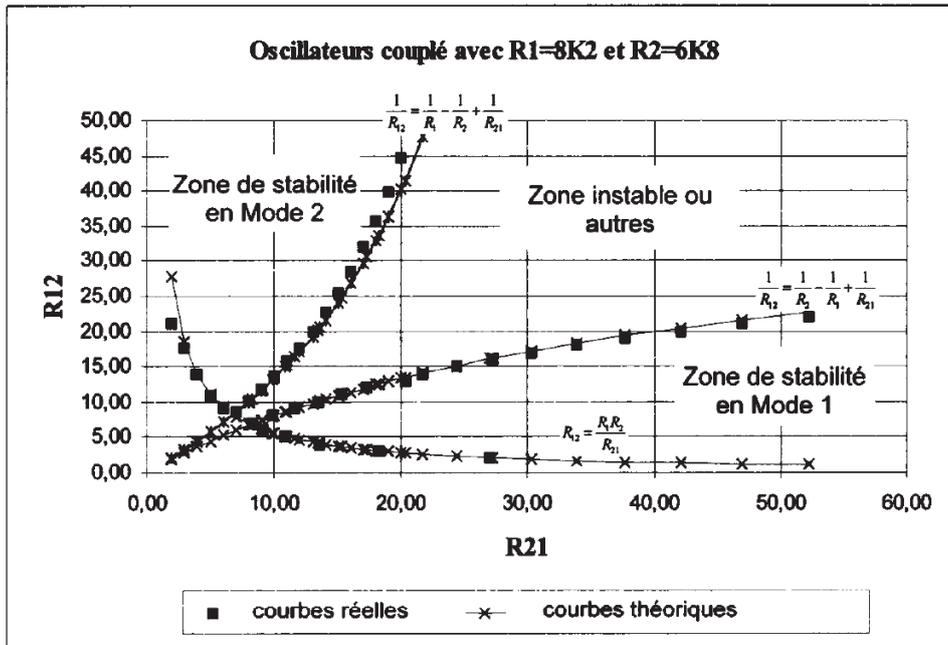
4.2 Couplage non linéaire de deux oscillateurs à relaxation



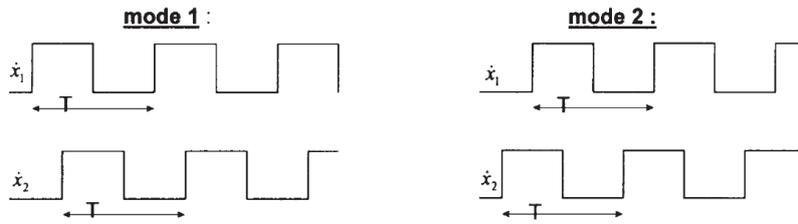
Quand on couple deux oscillateurs à relaxation de fréquences propres f_1^0 et f_2^0 différentes, on obtient les équations suivantes (calcul complet dans le ➤ BUP) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign} \left[\dot{x}_1 - 4f_1^0 \left(x_1 + \frac{\tau_1}{\tau_{12}} x_2 \right) \right] \\ \dot{x}_2 = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign} \left[\dot{x}_2 - 4f_2^0 \left(x_2 + \frac{\tau_2}{\tau_{21}} x_1 \right) \right] \end{cases} \quad (7)$$

avec $\tau_1 = R_1 C_1$, $\tau_2 = R_2 C_1$, $\tau_{12} = R_{12} C_1$, $\tau_{21} = R_{21} C_1$ ainsi que $f_1^0 = \frac{1}{4k\tau_1}$ et $f_2^0 = \frac{1}{4k\tau_2}$. Une étude très complète menée dans le BUP permet *in fine* de dresser un diagramme de stabilité des modes 1 et 2.



Le mode 1 correspond au mode où \dot{x}_1 est en avance sur \dot{x}_2 et inversement pour le mode 2.



On voit donc deux zones de stabilité (1 pour chaque mode) et une zone d'instabilité, donc les limites sont données par les équations

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= \frac{R_1 R_2}{R_{21}} && \text{(courbe en bas, notée } C_1) \\
 \frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21}} && \text{(courbe au milieu, notée } C_2) \\
 \frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{21}} && \text{(courbe en haut, notée } C_3)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

On obtient ainsi deux modes stables dans lesquels les deux oscillateurs sont déphasés mais oscillent à la même fréquence, alors que les oscillateurs seuls n'ont pas la même fréquence ! On voit aussi qu'on a des zones de stabilité et d'instabilité où le comportement est plus ou moins chaotique ! (à voir si on peut faire une analogie avec le pendule double chaotique...)



Pour chaque oscillateur isolé



En préparation, bien faire le zéro sur les offsets des AO, *i.e.* relier à la masse les entrées + et - de l'AO, et faire varier la molette de l'offset jusqu'à avoir un signal nul en sortie.

Observer le signal en \dot{x} et y . Remarquer que l'on a bien un signal carré pour \dot{x} , triangulaire pour y , et que leurs fréquences correspondent bien à celle prévue. On doit avoir un rapport cyclique de 0.5. Si ce n'est pas le cas, c'est que l'offset est mal réglé.

Mesurer précisément la valeur de R_1 (ou de R_2 pour le second oscillateur). Vérifier rapidement les valeurs des autres composants.



Couplage non linéaire de 2 oscillateurs à relaxation

↗ BUP 815



Matériel :

- 4 AO avec leurs alimentations
- 2 résistances $R_a = 1 \text{ k}\Omega$, 2 résistances $R_b = 10 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 6 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8 \text{ k}\Omega$, 2 condensateurs $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$
- boîtes à décades à résistance R_{12} et R_{21}
- oscilloscope

Mesurer précisément R_1 et R_2 à l'ohmmètre, et vérifier les valeurs des autres composants.

Observer à l'oscilloscope les sorties des quatre AO. A R_{21} fixé, faire varier R_{12} jusqu'à atteindre les limites de stabilité de la synchronisation.

Tant que l'on est à gauche du mode 1, c'est-à-dire pour R_{21} petit, on ne trouve qu'une limite inférieure, correspondant à la courbe \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_3 , notée $R_{\mathcal{C}_1}$ ou $R_{\mathcal{C}_3}$. Pour R_{21} suffisamment grand, on trouve trois limites correspondant aux courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .

Recommencer les mesures en faisant varier R_{21} .

Tracer les courbes $R_{\mathcal{C}_1} = a_1 \times \frac{1}{R_{21}}$, $\frac{1}{R_{\mathcal{C}_2}} = a_2 \times \frac{1}{R_{21}} + b_2$ et $\frac{1}{R_{\mathcal{C}_3}} = a_3 \times \frac{1}{R_{21}} + b_3$.

Incertitudes :

Il y a deux incertitudes ici présentes : celle de la boîte à décade et celle du choix de la résistance comme valeur limite. Celle des boîtes à décade est de 1/100 et est largement majoritaire devant celle du choix de la valeur limite. On pourrait limiter l'incertitude des boîtes à décade en les enlevant du circuit à chaque fois et en mesurant leur valeur au multimètre, mais cela ralentit assez largement la prise de mesure, et cela donnerait une précision sans doute inutile ici. En effet, on ne fait pas de la métrologie, on cherche juste à vérifier une relation analytique.

Conclusion

On a vu des couplages variés : couplage de 2 RLC identiques, couplage linéaire de pendules en torsion, couplage de plus de 2 oscillateurs et couplage non-linéaire entre oscillateurs à relaxation. On pourrait étudier un couplage inertiel (couplage inductif de 2 RLC), et l'exemple des métronomes sur un planche roulante est également un bon exemple de couplage non linéaire.

Le nombre de modes observés est égal au nombre d'oscillateurs s'il y a dégénérescence totale. Tant que l'équation est linéaire, plus le couplage est intense plus les modes s'écartent les uns des autres. L'étude des masses couplées est importante pour la dispersion de phonons dans les solides et le couplage inductif est fondamental dans le cadre des transformateurs.