

Oscillateurs couplés et ondes mécaniques

Bibliographie

- ↗ [H-prépa Ondes PC] : J.-M. BRÉBEC et. al., *H-prépa Ondes PC*, Hachette (1997)
- ↗ [Quaranta I] : L. QUARANTA, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome I : La mécanique*, Pierron (2002)
- ↗ [BUP 867] : R. DUFFAIT, *Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques*, BUP 867 p.1307 et suivantes (2004)
- ↗ [FLTCLD] : M. FRUCHART, P. LIDON, E. THIBIERGE, M. CHAMPION, A. LE DIFFON, *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck (2016)
- ↗ [Pantaleone] : J. PANTALEONE, *Synchronization of metronomes*, Am. J. Phys **70** (10), October 2002

Au cours de ce TP, nous allons étudier différents oscillateurs mécaniques couplés. Nous verrons qu'un couplage linéaire modifie les modes propres de vibrations d'un système, à travers l'augmentation du nombre de ses degrés de liberté. Puis nous nous intéresserons à un exemple de couplage non-linéaire d'oscillateurs.

Rappelons qu'une étude d'oscillateurs couplés en électronique est proposée dans le TP 7 du fascicule d'électronique. Les équations régissant ces systèmes étant identiques, il est possible de réaliser des analogies entre ces domaines.

Attention également à ne pas confondre la résonance d'un système avec l'étude de ses modes propres. La résonance correspond à un transfert maximal d'énergie entre un excitateur extérieur et le système. Tandis que l'étude des modes propres consiste uniquement à chercher des solutions stationnaires harmoniques à un système d'équation, sans apport d'énergie extérieur.

1 Pendules pesants couplés par un fil de torsion

1.1 Équations du mouvement

↗ [H-prépa Ondes PC] p.34

Nous allons utiliser le dispositif P79.21 composé de deux pendules pesants couplés par un fil de torsion, et schématisé en figure 2.1.

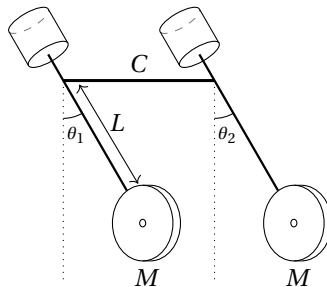


FIGURE 2.1 – Pendules pesants couplés par un fil de torsion.

Nous supposons que les deux pendules sont parfaitement identiques. On note J_0 leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et C la raideur du fil de torsion. Sur chacun des pendules, il est accroché une masse M à une distance L de l'axe de rotation. On note θ_1 et θ_2 les angles respectifs des tiges avec la verticale.

Le théorème du moment cinétique donne pour ce système :

$$\begin{cases} (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_1 + MgL\sin\theta_1 = C(\theta_2 - \theta_1) \\ (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_2 + MgL\sin\theta_2 = C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Dans l'approximation des petits angles, on aboutit au système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \frac{C}{J_0 + ML^2}(\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = \frac{C}{J_0 + ML^2}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ la pulsation propre des pendules isolés.

En cherchant des solutions harmoniques à ce système, on aboutit à deux solutions :

- le mode symétrique de pulsation $\omega_s = \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$,
- le mode antisymétrique de pulsation $\omega_{as} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J_0 + ML^2}} = \sqrt{\frac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2}}$.

Cette mise en équation est réalisée dans [H-prépa Ondes PC] p.34, en correction d'un exercice. Attention, le moment d'inertie J_0 du pendule n'est cependant pas pris en compte, et il y a une racine carrée en trop dans les expressions de ω_s^2 et ω_{as}^2 .

1.2 Étude des pendules isolés

Avant de commencer l'étude des pendules, il est nécessaire de les équilibrer.

Dévisser les deux mandrins qui serrent le fil de torsion pour découpler les pendules P79.21. Retirer les barreaux et les masses fixés sur les pendules, à l'exception de la masselotte vissée en haut de chaque tige.

Ajuster la position des masselottes pour que chaque pendule soit dans une position d'équilibre à chaque angle (en pratique, il est cependant difficile d'obtenir un équilibre parfait).

L'angle de chaque pendule est mesuré à l'aide d'un capteur potentiométrique, dont le boîtier renvoie une tension proportionnelle à celui-ci.

Relier les pendules au capteur potentiométrique (boîtier blanc), et l'alimenter par un boîtier P42.39.

Placer le gain au maximum pour chaque pendule, puis régler les zéros pour que la position verticale des tiges corresponde à des tensions nulles en sortie du capteur, que l'on mesure à l'aide d'un multimètre.

Pour étalonner le capteur de chaque pendule, mesurer la tension U_i pour différents angles θ_i , et réaliser une régression linéaire pour remonter au coefficient entre ces deux paramètres.

L'étude des oscillations libres des pendules va nous permettre de déterminer le moment d'inertie J_0 de la tige.

Accrocher un barreau avec une masselotte (500 g par exemple) sur la tige d'un pendule, on appelle L la distance à l'axe de rotation (on la mesure à l'aide d'un mètre-ruban P96) et M la masse du système {barreau + masselotte} (on la pèse à l'aide d'une balance P97).

Lancer le pendule avec une amplitude faible (15° maximum) pour rester dans l'approximation des petits angles, puis mesurer la pulsation ω_0 à l'aide d'un oscilloscope.

Recommencer l'expérience pour plusieurs distances L , puis tracer $\frac{MgL}{\omega_0^2}$ en fonction de L^2 , et en déduire l'ordonnée à l'origine J_0 par régression affine.

On obtient $J_0 \approx 0,069 \text{ kg/m}^2$.

On peut mesurer la raideur du fil de torsion C en couplant les pendules et en maintenant la position du second fixe.

Resserrer les mandrins qui serrent le fil de torsion à l'aide de la clé en maintenant les angles des pendules à $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Maintenir bloqué la tige du second pendule sur $\theta_2 = 0$ pendant toute l'expérience, à l'aide de la pièce adaptée. Pour différentes distances L , lancer le premier pendule avec une amplitude faible puis mesurer la pulsation ω_c des oscillations. Tracer $(J_0 + ML^2)\omega_c^2$ en fonction de L , et en déduire l'ordonnée à l'origine C par régression affine.

On obtient $C \approx 0,34 \text{ N.m}$.

1.3 Étude des pendules couplés

Accrocher sur chacun des deux pendules une même masse M à une même distance L de l'axe de rotation. Donner un angle faible à l'une des tiges et maintenir l'autre à la verticale, puis lâcher les deux pendules pour les laisser évoluer librement. La superposition des deux modes propres produit un phénomène de battements.

Acquérir les deux signaux pendant quelques minutes sur Latis-Pro. Réaliser une FFT sur les signaux pour remonter aux deux pulsations propres ω_s et ω_{as} .

Recommencer l'expérience pour plusieurs distances L , puis tracer $\frac{1}{\omega_{as}^2 - \omega_s^2}$ en fonction de L^2 pour obtenir une droite

de coefficient directeur $\frac{M}{2C}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{J_0}{2C}$. Retrouver les valeurs de C et de J_0 par régression linéaire, et les comparer aux mesures précédentes.

Pour un couplage linéaire, il n'y a pas d'échange d'énergie entre les différents modes. La prédominance d'un mode par rapport à l'autre dépend alors uniquement des conditions initiales. On peut donc exciter séparément les deux modes.

Donner un même angle initial aux deux pendules, puis les lâcher pour qu'ils évoluent à partir de cette condition initiale. Acquérir les signaux, réaliser une FFT et observer que seul le mode symétrique de pulsation ω_s est excité. Recommencer en leur donnant des angles opposés à l'instant initial, et observer que seul le mode antisymétrique de pulsation ω_{as} est excité.

1.4 Étude énergétique (en seconde lecture)

L'énergie totale du système est la somme des énergies mécaniques de chaque pendule et de l'énergie de couplage :

$$E_{\text{tot}} = E_1 + E_2 + E_c$$

avec :

$$\begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} (J_0 + ML^2) \dot{\theta}_1^2 + MgL(1 - \cos\theta_1) \\ E_2 = \frac{1}{2} (J_0 + ML^2) \dot{\theta}_2^2 + MgL(1 - \cos\theta_2) \\ E_c = \frac{1}{2} C (\theta_1 - \theta_2)^2 \end{cases}$$

À partir d'une condition initiale quelconque, réaliser une acquisition des deux signaux sous Latis-Pro, puis calculer les énergies E_1 , E_2 , E_c et E_{tot} à l'aide d'une Feuille de Calcul. Penser à convertir les tensions en radian en utilisant les coefficients obtenus lors de l'étalonnage des capteurs. On pourra également lisser les courbes et soustraire aux angles leurs valeurs moyennes sur l'acquisition.

Tracer l'évolution des énergies au cours du temps. Interpréter les échanges énergétiques qui ont lieu au cours d'une oscillation. À partir de la décroissance de l'énergie totale, on peut en déduire le type de frottement prédominant et le facteur de qualité du système.

L'amortissement peut être décrit par une exponentielle décroissante, les pendules sont donc principalement soumis à des frottements fluides, avec un facteur de qualité de l'ordre de 5.

2 Système de masses couplées

✦ [FLTCLD] p.490, [BUP 867]

2.1 Équations du mouvement

Nous allons utiliser le dispositif P79.22/1 composé de quatre pendules simples de longueur L , de masse M et séparés d'une distance l_0 . Ils sont reliés entre eux et à un bâti fixe à chaque extrémité par des ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2.2).

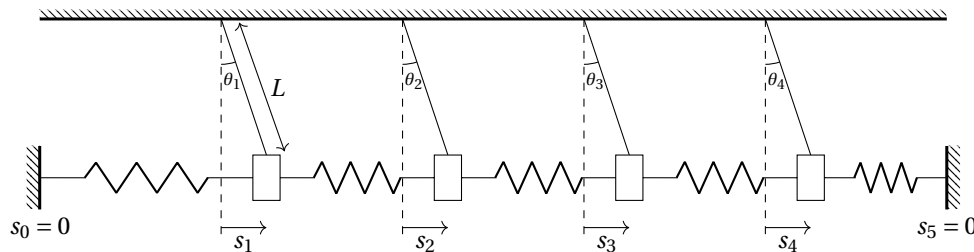


FIGURE 2.2 – Système de quatre masses couplées.

Les déplacements des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont suffisamment petits pour considérer que leurs mouvements sont uniquement horizontaux. On note $s_i = x_i - x_i^{eq}$ l'écart de chaque masse par rapport à sa position d'équilibre, θ_i l'angle du pendule avec la verticale, et on assimile les extrémités fixes à des masses de coordonnées x_0 et x_5 .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour chaque masse :

$$M\ddot{x}_i = k(x_{i+1} - x_i - l_0) - k(x_i - x_{i-1} - l_0) + Mg \tan\theta_i$$

En considérant que $\tan \theta_i \approx \frac{s_i}{L}$, on peut le réécrire sous la forme :

$$\ddot{s}_i = \Omega_0^2 s_i + \Omega_1^2 (s_{i+1} + s_{i-1} - 2s_i)$$

avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et $\Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

En cherchant des solutions harmoniques satisfaisant aux conditions aux limites $s_0 = s_5 = 0$, on obtient quatre modes propres de pulsations :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\Omega_1^2} \\ \omega_4 = \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\Omega_1^2} \end{cases}$$

Chaque mode est associé à un vecteur propre, c'est-à-dire à un déplacement simultané des quatre masses, que l'on représente schématiquement sur la figure 2.3.

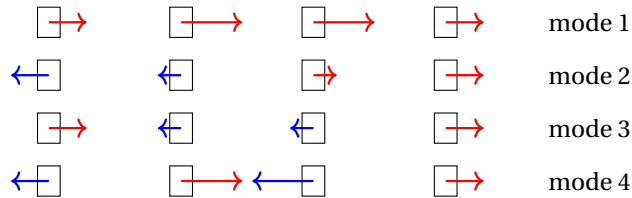


FIGURE 2.3 – Représentation des modes propres du système de 4 pendules couplés.

Plus généralement, on peut montrer qu'un système de N masses possède N modes propres de pulsations $\omega_{p,N}$ telles que :

$$\omega_{p,N}^2 = \Omega_0^2 + 4\Omega_1^2 \sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)$$

avec $p = 1, 2, \dots, N$.

2.2 Étude des oscillations libres

Avant de commencer l'étude du système, il est nécessaire de mesurer ses différents paramètres. Par manque de temps, vous pouvez cependant passer cette étape et utiliser les valeurs indiquées ci-dessous.

Si le poids des masses du système P79.22/1 n'est pas indiqué, les peser, puis calculer la masse moyenne M .

Mesurer la constante de raideur moyenne k des ressorts du système en suspendant des masselottes et en mesurant leurs allongements relatifs.

Mesurer la longueur L des pendules formés. Attention, elle est différente de la longueur des deux fils pour ce système.

Expérimentalement, nous obtenons : $M \approx 323$ g, $k \approx 115$ N/m et $L \approx 33$ cm.

Nous allons utiliser le dispositif VidéoCom P17.14 pour suivre le déplacement de chaque masse au cours du temps. Il est constitué de LED qui émettent des flashes lumineux à intervalles réguliers, et d'une barrette CCD qui détecte la position des masses grâce à des bandes réfléchissantes.

Visser la caméra du dispositif VidéoCom P17.14/2 sur un trépied P32.11 (demander une platine aux techniciens si besoin), puis la placer en face du système de pendules à environ 1 m de celui-ci.

Alimenter la caméra avec son adaptateur 12 V. Alimenter les LED en branchant le petit câble de la caméra sur le port LED sur le coté de celle-ci (les LED s'allument). Allumer un ordinateur puis le relier à la caméra avec le câble USB. Lancer le logiciel VidéoCom Mouvements. Dans le menu Réglage et l'onglet Généralités indiquer le raccordement choisi (USB) dans Raccord Série, puis dans l'onglet Spécifications sélectionner la période d'échantillonnage Δt la plus basse possible.

Ajuster la position de la caméra (éloignement, hauteur, orientation) pour détecter les quatre masses, qui doivent apparaître à l'écran. On pourra également jouer sur le zoom et le diaphragme de la caméra, et placer un tissu noir derrière le système pour faciliter la détection.

Comme pour les pendules couplés par un fil de torsion, l'amplitude relative de chacun des modes propres du système dépend des conditions initiales données aux systèmes.

Mettre les masses en mouvement à partir d'une condition initiale quelconque, par exemple en déplaçant l'une des masses par rapport à sa position d'équilibre. Réaliser un enregistrement avec VidéoCom pendant environ 1 min en cliquant sur l'icône Lancer/arrêter la mesure.

Si la détection des masses n'a pas posé de problème, tracer les FFT des courbes obtenues : avec un clic droit sélectionner Calcul FFT, puis surligner l'enregistrement d'une masse. Mesurer les fréquences propres obtenues.

Le temps d'acquisition sur lequel est réalisé la FFT doit être judicieusement choisi pour bien mesurer les fréquences propres du système. Il faut trouver un compromis entre un temps suffisamment long pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, mais suffisamment faible pour éviter l'amortissement dû aux non-linéarités qui provoque un élargissement des pics.

Pour une condition initiale quelconque, on retrouve une superposition des quatre modes propres du système. Les trois premiers modes sont habituellement assez faciles à détecter, contrairement au quatrième dont l'amplitude est assez faible.

On peut donner plus d'amplitude à un mode propre particulier en utilisant une condition initiale proche de son vecteur propre.

Recommencer plusieurs fois l'expérience précédente en partant à chaque fois d'une condition initiale où la position des masses correspond à un mode propre représenté en figure 2.3.

Tracer la FFT des courbes, et observer que l'amplitude du mode correspondant est plus importante que les autres.

2.3 Évolution avec le nombre de masses

En réduisant le nombre de masses constituant le système, on modifie les modes propres.

Fixer la position d'une masse à l'extrémité du système en la maintenant à l'aide d'un statif et d'une pince.

Enregistrer les oscillations libres des masses restantes pour une condition initiale quelconque, puis tracer la FFT des courbes et mesurer les 3 pulsations propres $\omega_{p,N=3}$ du système.

Fixer la seconde masse, et recommencer l'expérience pour remonter aux 2 pulsations propres $\omega_{p,N=2}$ d'un système de 2 masses.

Fixer la troisième masse, et recommencer l'expérience pour remonter à la pulsation propre $\omega_{p,N=1}$ d'un système à 1 masse.

Superposer sur une même courbe toutes les mesures de $\omega_{p,N}^2$ en fonction de $\sin^2\left(\frac{p\pi}{2(N+1)}\right)$ avec N le nombre de masses du système correspondant et p le numéro du mode propre.

Réaliser une régression linéaire pour remonter à Ω_0 et Ω_1 , puis les comparer à leurs valeurs théoriques.

2.4 Étude des oscillations forcées

Nous pouvons observer la résonance du système en excitant indépendamment chacun de ses modes propres.

Visser la petite tige trouée à son extrémité P79.22/1 sur un vibreur P99.13. Incliner horizontalement le vibreur et le placer sur un support élévateur P25, puis relier la tige à l'un des ressorts situés aux extrémités du système de pendules. Alimenter le vibreur avec la sortie d'un amplificateur P47.7, commandé en entrée par un GBF qui fournit une tension sinusoïdale de quelques hertz et de 1 V. Régler l'amplificateur sur un gain de 3 environ, puis appuyer sur le bouton Reset pour générer la tension en sortie (la diode s'éteint).

ATTENTION : l'amplitude du vibreur ne doit pas être trop importante pour ne pas l'endommager, si le vibreur produit des à-coups violents réduire le gain de l'amplificateur!

Observer la résonance du système lorsqu'il est excité à l'une de ses fréquences propres. Retrouver les déplacements des masses correspondant aux vecteurs propres représentés en figure 2.3.

3 Corde de Melde

☞ [H-prépa Ondes PC] p.37, [Quaranta I] à « Ondes Stationnaires »

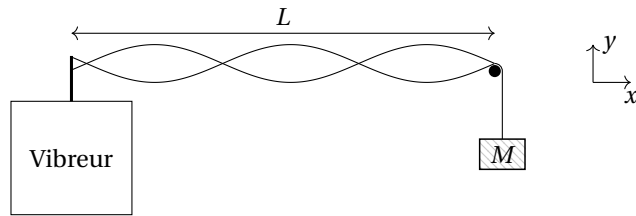


FIGURE 2.4 – Expérience de Melde.

3.1 Description du dispositif

L'expérience de Melde, schématisée en figure 2.4, est principalement utilisée pour étudier des ondes stationnaires. Elle peut aussi être assimilée à une infinité d'oscillateurs couplés.

Une extrémité de la corde est attachée à un vibreur, et l'autre est reliée à une masselotte par l'intermédiaire d'une poulie. La masselotte M impose une tension $T = Mg$ dans la corde. On note L la longueur et μ la masse linéique de la corde. En considérant des déformations faibles, et en négligeant l'influence de la pesanteur, on peut montrer que le déplacement vertical $y(x, t)$ de la corde obéit à une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

avec $c = \sqrt{T/\mu}$ la célérité des ondes transverses.

On considère les conditions aux limites suivantes :

- en $x = 0$, le vibreur impose un déplacement $y(0, t) = a \cos(\omega t)$,
- en $x = L$, la corde repose sur la poulie d'où $y(L, t) = 0$.

En cherchant une solution sous la forme d'une onde stationnaire, on aboutit à une solution du type (voir [H-prépa Ondes PC] p.49) :

$$y(x, t) = a \frac{\sin\left(\frac{(L-x)\omega}{c}\right)}{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)} \cos(\omega t)$$

La corde entre en résonance lorsque l'amplitude diverge, c'est-à-dire pour des pulsations :

$$\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

En pratique, l'amplitude ne peut pas diverger à cause de l'élasticité de la corde, qui n'a pas été prise en compte dans ce modèle. Cependant, lorsque le système est excité à l'une de ses pulsations de résonance, l'amplitude du vibreur devient négligeable devant celle des ondes. On peut alors assimiler l'extrémité en $x = 0$ à un nœud de vibration, et n correspond au nombre de ventre sur la corde.

REMARQUE : en imposant la condition à la limite $y(0, t) = 0$, on montre que les modes propres du système (en régime libre) ont des pulsations identiques aux pulsations de résonances (en régime forcé).

3.2 Mesure de la célérité des ondes

Avant de commencer, il faut mesurer la masse linéique de la corde utilisée.

Mesurer la longueur d'une ficelle P99 à l'aide d'un mètre-ruban P96, ainsi que sa masse à l'aide d'une balance de précision P97.16, et en déduire sa masse linéique μ (autour de 1 g/m).

On réalise ensuite l'expérience de Melde présentée en figure 2.4.

Relier une extrémité de la corde à un vibreur P99.13, en réalisant un nœud autour d'une vis (diamètre M4) fixée sur le vibreur. Relier l'autre extrémité de la corde à une masselotte $M = 100$ g P98, que l'on suspend avec une poulie P80 placée à une distance $L \approx 1$ m du vibreur.

Alimenter le vibreur avec la sortie d'un amplificateur P47.7, commandé en entrée par un GBF qui fournit une tension sinusoïdale basse fréquence de 1 V. Régler l'amplificateur sur un gain de 3 environ, puis appuyer sur le bouton Reset pour générer la tension en sortie (la diode s'éteint).

ATTENTION : l'amplitude du vibreur ne doit pas être trop importante pour ne pas l'endommager, si le vibreur produit des à-coups violents, il faut réduire le gain de l'amplificateur!

Augmenter progressivement la fréquence du GBF pour obtenir les premières pulsations de résonances ω_n de la corde. Chaque résonance est caractérisée par n ventres d'amplitudes importantes et $n + 1$ nœuds.

Pour vérifier que les fréquences de résonances correspondent bien à la fréquence imposée par le GBF, on pourra utiliser un stroboscope (P3.3) que l'on relie à un fréquencemètre P69.5. On règle alors la fréquence des flashes sur celle des ondes pour la mesurer.

Tracer ω_n en fonction de n , et remonter à c par régression linéaire.

On peut comparer la célérité à sa valeur théorique $c = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$.

En considérant que la corde de Melde est un milieu continu, on obtient un système avec une infinité de degrés de liberté, et donc une infinité de modes propres et de pulsations de résonance.

4 Exemple de couplage non-linéaire : la synchronisation de métronomes (en seconde lecture)

✎ [Pantaleone]

Le phénomène de synchronisation des horloges a été décrit pour la première fois par Huygens en 1657. Il remarqua que deux horloges montées sur une base commune se synchronisent en phase grâce à un couplage non-linéaire. Nous pouvons reproduire une expérience analogue en plaçant deux métronomes sur une plaque rigide, elle-même posée sur deux cylindres lui permettant de se translater horizontalement, comme présenté en figure 2.5.

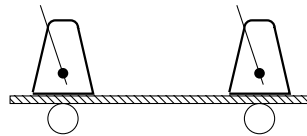


FIGURE 2.5 – Synchronisation de deux métronomes.

On peut décrire l'évolution de ce système de façon simplifiée en assimilant les métronomes à des oscillateurs de Van der Pol couplés par un coefficient non-linéaire (voir [Pantaleone]). On montre alors par une analyse de stabilité que lorsque les deux métronomes oscillent en phase, ou en opposition de phase suivant les conditions expérimentales, cela correspond à un point fixe attracteur dans l'espace des phases, et donc à un état stable du système.

La synchronisation en phase est possible grâce au couplage non-linéaire complexe entre les métronomes. Une non-linéarité importante peut également faire apparaître une synchronisation en fréquence et en amplitude pour des métronomes différents.

Nous allons nous limiter ici à observer une synchronisation en phase de deux métronomes qui oscillent à la même fréquence et à la même amplitude.

Régler les fréquences de deux métronomes P71.36 sur une fréquence élevée (200 battements par minutes par exemple).

Tourner les remontoirs du bas dans le sens des aiguilles d'une montre au maximum pour recharger les mécanismes.

Placer une petite planche de bois (P25 par exemple) sur deux canettes vides P71, puis déposer les métronomes sur la planche comme indiqué en figure 2.5.

Lancer les métronomes avec une même amplitude, mais avec un déphasage entre eux. Après quelques dizaines de secondes, on entend que leurs phases se synchronisent.

Lorsque les phases sont synchronisées, la plaque oscille avec une grande amplitude et à la même fréquence que les métronomes.

On observe parfois une synchronisation en opposition de phases des métronomes pendant quelques secondes, mais cet équilibre est assez instable.