

Conduction thermique dans une barre cylindrique.

Objectifs du TP

Les objectifs de ce TP sont multiples :

- Vérifier la loi théorique de la température dans une barre en régime permanent.
- Déterminer le coefficient d'échange de chaleur superficiel de la barre.
- Déterminer le coefficient d'échange d'un échangeur.

Pour réaliser ces objectifs, on sera amené à faire des acquisitions automatiques de signaux et à les traiter.

A/ Principe de la conduction thermique

et étude théorique de la conduction dans une barre métallique cylindrique

I/ Principe de la conduction thermique

Lorsque deux corps sont à des températures différentes, il y a transfert thermique d'énergie du plus chaud vers le plus froid.

Lorsque ce transfert thermique ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière, il s'agit d'un **transfert conductif**.

Lorsqu'une des extrémités d'une tige métallique est placée au contact d'une source chaude, le phénomène de conduction thermique se manifeste par une élévation progressive de la température des parties froides de la tige : le phénomène dépend du temps et de l'espace et on parle d'une **diffusion thermique**.

Modèle de la conduction

Supposons que, dans un milieu matériel, la température ne soit pas uniforme mais décroisse dans une direction que nous choisirons pour l'axe Ox. Il se produit un transfert de chaleur depuis la région de température élevée vers la région de basse température.

L'énergie thermique δQ qui traverse par conduction thermique, pendant un temps dt une surface élémentaire dS perpendiculaire à l'axe Ox depuis la région chaude vers la région froide est proportionnelle à cette surface et d'autant plus grande que l'écart de température est plus grand. On peut donc définir une densité de flux thermique (ou flux surfacique) notée j_{th} , telle que :

$$\delta Q = j_{th} \cdot dS \cdot dt$$

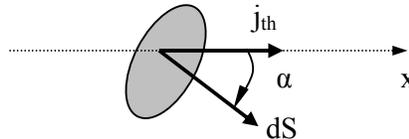
et traduire le rôle de l'écart de température par :

$$j_{th} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

Le signe moins indique que le transfert se fait de la région la plus chaude vers la région la plus froide. Le coefficient λ , appelé **conductivité thermique** du corps étudié est positif et s'exprime en $\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$. Le flux thermique j_{th} s'exprime en W.m^{-2} .

Si la surface dS n'est pas orthogonale à l'axe Ox , la chaleur δQ qui la traverse pendant le temps dt est plus faible :

$$\delta Q = j_{th} \cdot \cos(\alpha) dS \cdot dt$$



On peut traduire l'influence de l'orientation en introduisant un vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_{th} = j_{th} \cdot \vec{e}_x$ et en écrivant

$$\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

Loi de Fourier

Dans un milieu dont la température $T(x,t)$ varie uniquement dans la direction de l'axe Ox , la conduction se manifeste par l'existence d'un vecteur densité de flux thermique dans le sens des températures décroissantes.

On a vu que pour un phénomène unidimensionnel, cela s'écrit : $j_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}$.

Soit sous forme vectorielle, lorsque la température dépend des trois paramètres d'espace :

$$\boxed{\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}}$$

Plus la conductivité thermique λ est importante, meilleur conducteur est le corps :
 Cuivre $\lambda = 390 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$; acier inox $\lambda = 16 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$; bois (chêne) : $\lambda = 0,17 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$.

II/ Conduction dans une barre métallique cylindrique

II.1/ Equation de la diffusion

On considère une barre métallique cylindrique de section circulaire S constante et de longueur L très supérieure au diamètre $2R$ de la section.

La barre est chauffée en permanence à une extrémité. Le matériau constituant la barre métallique, est bon conducteur de chaleur, de sorte que la chaleur se propage par conduction le long de la barre et transversalement à celle-ci pour se déverser dans le milieu entourant la barre.

On admet que la température à l'intérieur de la barre est homogène sur toute une section (on se ramène alors à un problème monodimensionnel), c'est à dire que les sections sont isothermes.

On note $T(x)$ la température de la barre à l'abscisse x . On note T_0 la température à l'extrémité chauffée de la barre, et T_∞ la température ambiante.

On note μ la masse volumique du métal, c sa chaleur massique et λ sa conductivité thermique (λ supposée constante).

En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur une partie de la barre située entre les abscisses x et $x+dx$ pendant un instant dt , on obtient :

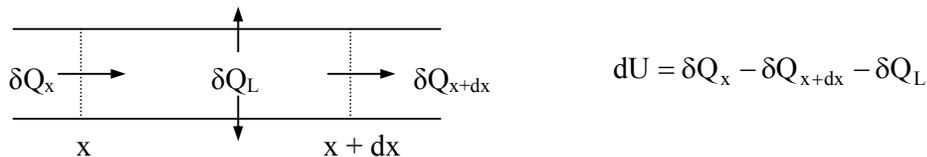


Figure 1

où δQ_x est l'énergie thermique traversant par conduction la section droite d'aire S , située à l'abscisse x , et δQ_L l'énergie thermique traversant par conducto-convection la surface latérale comprise entre x et $x+dx$.

Sachant que δQ_L est proportionnel à la différence de température entre la barre et l'extérieur, au coefficient d'échange de chaleur superficiel, noté h (supposé constant et indépendant du matériau), et à la surface d'échange, on obtient :

$$\mu.c.dx.S.dt = dt[S[j(x) - j(x + dx)] - 2.\pi.R.dx.h[T(x) - T_\infty]]$$

avec $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, on obtient l'équation de propagation de la chaleur :

$$\mu.c. \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - h. \frac{2.\pi.R}{S} [T(x) - T_\infty]$$

Nous avons ainsi établi l'équation de la chaleur à une dimension. C'est une équation de diffusion, qui relie la dérivée spatiale seconde à la dérivée temporelle première.

Dans le cadre de ce T.P., on ne considérera que des excitations constantes dans le temps à l'extrémité chauffée de la barre, c'est à dire que l'on se placera en régime permanent. Il faudra pour cela que la manipulation soit en fonctionnement depuis un certain temps pour que ce régime permanent soit atteint.

L'équation devient alors :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha^2 \cdot [T(x) - T_\infty] = 0}$$

avec $\alpha^2 = \frac{h \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{\lambda \cdot S}$

La solution de cette équation est de la forme :

$$T(x) = T_\infty + A \cdot \exp(-\alpha \cdot x) + B \cdot \exp(\alpha \cdot x) \quad (1)$$

ou encore

$$T(x) = T_\infty + C \cdot \text{ch}(\alpha \cdot x) + D \cdot \text{sh}(\alpha \cdot x) \quad (2)$$

Les constantes A et B ou C et D sont déterminées par les conditions aux limites imposées aux extrémités de la barre.

II.2/ Recherche des solutions

Cas d'une barre très longue (infinie)

Tout se passe comme si, à l'extrémité non chauffée ($x \rightarrow \infty$), la température tendait vers celle du milieu ambiant T_∞ .

Les deux conditions aux limites sont $\begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(\infty) = T_\infty \end{cases}$. On exploite la solution (1), avec B nul.

$$\boxed{\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-\alpha \cdot x)}$$

α , qui a la dimension de l'inverse d'une longueur, caractérise l'atténuation de chaleur le long de la barre.

Cas d'une barre de longueur finie

Deux cas peuvent être envisagés : le cas d'une barre dont l'extrémité non chauffée est isolée de l'extérieur (sans échange) et celui d'une barre dont l'extrémité non chauffée n'est pas isolée (avec échange).

Sans échange

On considère, qu'à l'extrémité de la barre, le flux thermique traversant la section de la barre est nulle.

Les deux conditions aux limites sont $\begin{cases} T(0) = T_0 \\ \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \end{cases}$. On exploite la solution (2),

$$\boxed{\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\text{ch}[\alpha(L - x)]}{\text{ch}(\alpha L)}}$$

Avec échange

On considère que l'extrémité de la barre est traversée par un flux convectif (du même type que celui traversant la surface latérale lors du bilan d'énergie établi plus haut).

$$\text{Les deux conditions aux limites sont } \begin{cases} T(0) = T_0 \\ -\lambda.S.\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = H.S.[T(L) - T_\infty] \end{cases}$$

Où H est le coefficient d'échange thermique superficiel de l'échangeur (supposé indépendant du matériau). On exploite la solution (2),

$$\boxed{\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{ch[\alpha(L-x)] + \frac{H}{\lambda.\alpha} sh[\alpha(L-x)]}{ch(\alpha L) + \frac{H}{\lambda.\alpha} sh(\alpha L)}}$$

B/ Présentation du matériel et Acquisition des données

Le banc de Travaux Pratiques Thermobarre est constitué de :

- une partie matérielle et thermique
- une partie électronique
- un ordinateur muni d'une carte d'acquisition
- un ordinateur pour le traitement des données.

I/ Présentation du matériel**I.1/ Partie matérielle et thermique**

Cette partie se présente sous la forme d'un double coffrage indépendant d'une longueur d'environ 1 m , fixé sur un socle en plexiglas. Dans l'un de ces coffrages se trouve une barre cylindrique en cuivre et dans l'autre une barre cylindrique en acier. Ces deux barres de longueur $L = 0,846$ m et de diamètre $2R = 22$ mm, sont entourées d'un isolant thermique. Dans chacune de ces barres sont implantés, à intervalle régulier de 120 mm, 8 capteurs de températures qui délivrent les températures en temps réel. Ces températures seront ensuite captées par une carte d'acquisition.

A l'extrémité gauche de chaque barre, une résistance chauffante de 100 W permet la montée en température de celle-ci.

L'autre extrémité de la barre permet à l'utilisateur de **fixer les conditions aux limites** :

- Barre entièrement isolée de l'extérieur : il suffit de mettre en place l'isolant et de fixer la plaque métallique fournie.
- Barre couplée à l'extérieur grâce à échangeur constitué d'un radiateur à ailettes et d'un ventilateur extracteur. Ceci permet de maintenir constant le flux thermique à cette extrémité.



I.2/ Partie électronique

Cette partie permet :

- La commutation entre les deux barres (cuivre ou acier).
- La commande et la régulation de la résistance chauffante.
- L'alimentation du ventilateur.
- Les connexions pour les prises de mesures.



II/ Acquisition et traitement des données

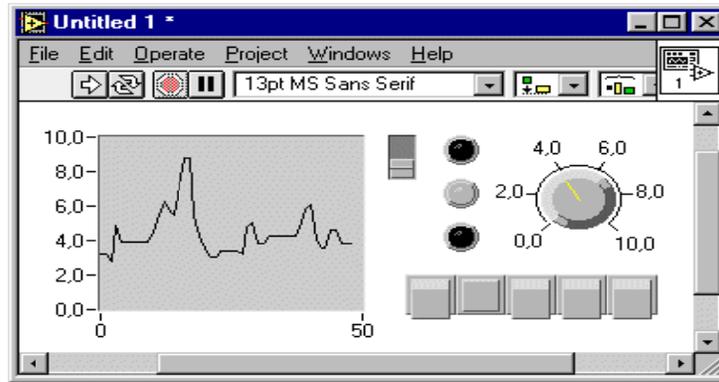
Le but de la séance de Travaux Pratiques est de mettre en évidence le phénomène de conduction thermique (phénomène qui dépend du temps et de l'espace), puis de déterminer les valeurs numériques des coefficients d'échange thermique h et H .

On sera amené pour cela d'une part à effectuer une acquisition automatique sur la barre de cuivre (avec ventilateur) par l'intermédiaire de la carte **NATIONAL INSTRUMENTS** et du logiciel **LabVIEW** (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench), et d'autre part de traiter des données déjà fournies sur la barre d'acier avec le logiciel **Origin**.

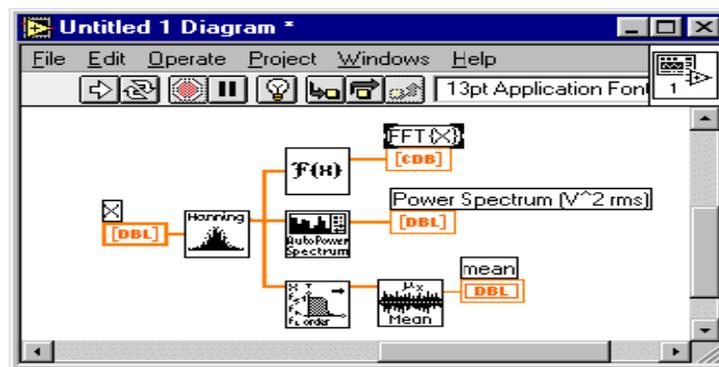
LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) est un logiciel de développement d'applications d'instrumentation. Bien que tout à fait utilisable dans un grand nombre de domaines, LabVIEW est plus particulièrement destiné à l'acquisition de données et au traitement du signal. En effet, ce logiciel offre de larges possibilités de communication entre l'ordinateur et le monde physique (par cartes d'acquisitions analogiques ou numériques, cartes GPIB, réseau, liaisons série et parallèles, etc.) ainsi que d'importantes bibliothèques mathématiques permettant de traiter les signaux mesurés.

LabVIEW permet de réaliser, entre autre, des instruments virtuels. Par extension on appellera VI (pour Virtual Instrument) toute application réalisée avec LabVIEW. Un VI est composé de deux parties liées :

Une face-avant (Front-Panel): c'est l'interface (ou moyen de communication) avec l'utilisateur. Cette face-avant, personnalisable à loisir, est composée d'objets graphiques comme des interrupteurs, des potentiomètres, des zones de graphismes, etc. Elle représente la face-avant de l'instrument.



Un diagramme (Block-Diagram) : cette partie décrit le fonctionnement interne du VI. On utilise le langage G pour décrire ce fonctionnement. Destiné à être utilisé par des ingénieurs et des scientifiques, non informaticiens de formation, LabVIEW utilise un langage de programmation graphique G (pour Graphique) afin de décrire les programmes dictant le comportement de l'application. Ainsi l'utilisateur est affranchi de la lourde syntaxe des langages de programmation textuels tels que C, Basic, etc. Normalement ce diagramme n'est pas visible par l'utilisateur.



Nous avons développé avec **LabVIEW**, un programme destiné à acquérir les 8 températures correspondant aux différents endroits de la barre où se trouvent les capteurs. L'évolution temporelle de ces 8 signaux sera également affichée.

Deux ordinateurs sont à votre disposition, l'un est relié au système d'acquisition et au dispositif Thermobarre, l'autre sert à effectuer le traitement des données. Vous pouvez donc traiter certaines données pendant qu'une acquisition est en cours.

Pour chacune des conditions aux limites, on obtient un réseau de courbes dont l'allure est celle de la figure 2; où chacune des courbes correspond à l'évolution de la température pour les différents capteurs de la barre.

On s'intéresse au régime permanent, c'est à dire pour des temps supérieurs à t_{perm} . On va donc relever les valeurs des températures des différents capteurs pour $t = t_{\text{perm}}$ et traiter ces données.

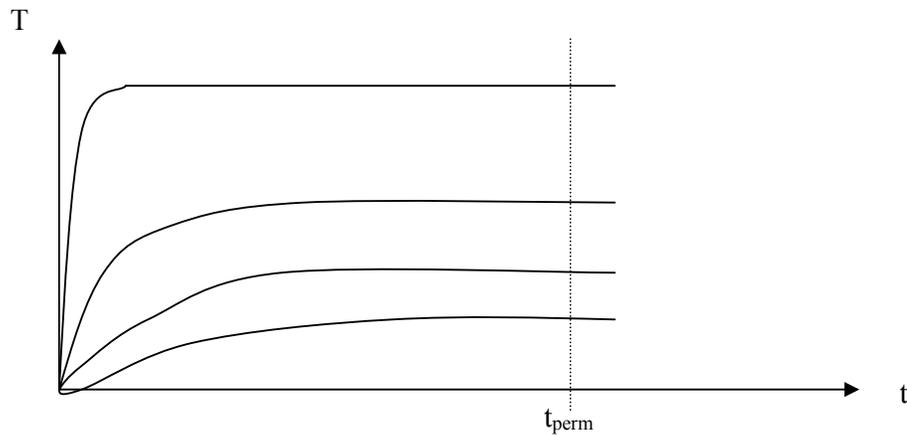


Figure 2

C/ Manipulation

Récapitulatif des données :

- diamètre de la barre : $2R=22\text{mm}$
- longueur de la barre : $L=0,846\text{m}$
- $\lambda_{\text{cuivre}} = 389 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\lambda_{\text{acier}} = 54 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Pour toute nouvelle session de travail, il est impératif de vider le contenu du fichier « test » qui se trouve sur le desktop.

Première Etape

☒ Lancer une acquisition automatique sur la barre de cuivre (avec ventilateur sur l'extrémité droite de la barre). Pour cela :

☒ **Ouvrir le fichier** « Conduction Thermique » sur le desktop. **Labview** sera ainsi lancé. La face-avant apparaît.

☒ **Assurez-vous** que les paramètres **Rate** et **Number of samples** sont affectées des valeurs suivantes : **Rate** : 2 Hz, **Number of samples** : 10

☒ **Appuyer** sur le bouton « \Rightarrow : **Run** » pour exécuter le programme. L'acquisition est en cours pendant un temps de 30 minutes.

☒ **Vous arrêterez l'acquisition** 1 minute avant la fin, en appuyant sur le bouton stop.

Pendant ce temps d'acquisition, vous devez effectuer la deuxième étape.

Deuxième Etape

Ouvrir le fichier Evolution temporelle Acier (version **Origin**) qui se trouve sur le desktop. Ce fichier correspond à une acquisition faite antérieurement sur la barre d'Acier et qui décrit l'évolution temporelle des températures des 8 capteurs (figure 3).

- ☒ Tracer sur la figure 3 une ligne horizontale.
- ☒ Reproduire avec cette ligne l'asymptote aux différentes courbes correspondant aux régimes permanents.
- ☒ Cliquer sur le bouton <CURSEUR>. Il apparaît un réticule, constitué de deux traits perpendiculaires en pointillés, qui peut être déplacé à l'aide des flèches. Dans la petite fenêtre *CURSEUR* qui apparaît dans la zone d'information, s'affichent les coordonnées X et Y du point d'intersection des deux traits constituant le curseur.
- ☒ Placer le curseur sur la ligne horizontale et noter les différentes valeurs correspondantes à T0, T1, T2, T3, T4, T5, T6 et T7 en régime permanent.

⌘ Choix du modèle pour la conduction thermique dans l'acier

- ☒ Créer un nouveau fichier **Origin** dans lequel il faut tracer la variation de la température réduite $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ en fonction de l'abscisse x du capteur (x = 0, 0.12, ...). $T_\infty = 29 \text{ }^\circ\text{C}$ correspond à la température ambiante du Laboratoire lorsque l'acquisition a été réalisée.
- ☒ Aller dans la rubrique **Analysis**, puis cliquer sur **Fit Exponentiel Decay** → **First Order**. Le logiciel va modéliser vos points expérimentaux sous forme d'une fonction exponentielle.

☒ **Conclure.**

- ☒ Déterminer alors α_{Acier} , h (le coefficient d'échange de chaleur superficiel) et α_{Cuivre} .
- ☒ Cliquez sur le fichier « **add Printer** » figurant sur le desktop et imprimer la courbe de variation $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ en fonction de x.

Troisième étape

Une fois que l'acquisition, sur la barre de cuivre, est terminée :

- ☒ **Lancer** le logiciel **Origin**
- ☒ **Sélectionner** **File : Import : Single ASCII**

Choisir le fichier *test* qui se trouve sur le desktop.
 Cette opération a pour résultat l'importation des données sous forme de 8 colonnes qui donnent les différentes valeurs de T0, T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7.

☒ **Créer** une neuvième colonne portant les entiers correspondant aux numéros des points d'acquisition.

☒ **Sélectionner** **Plot : Line**
 Choisir la colonne x (la neuvième) et y (les valeurs de T0).

☒ **Sélectionner** **Graph : Add Plot to Layer : Line**
 Choisir la même colonne x (la neuvième) et une autre colonne y (les valeurs de T1).
 Répéter la même opération d'une façon à tracer sur la même fenêtre l'évolution temporelle de T0, T1, T2, T3, T4, T5, T6 et T7. La fenêtre obtenue sera appelée figure 4.

☒ Tracer sur la figure 4 une ligne horizontale.

☒ Reproduire avec cette ligne l'asymptote aux différentes courbes correspondant aux régimes permanents.

☒ Cliquer sur le bouton <CURSEUR>. Il apparaît un réticule, constitué de deux traits perpendiculaires en pointillés, qui peut être déplacé à l'aide des flèches. Dans la petite fenêtre *CURSEUR* qui apparaît dans la zone d'information, s'affichent les coordonnées X et Y du point d'intersection des deux traits constituant le curseur.

☒ Placer le curseur sur la ligne horizontale et noter les différentes valeurs correspondantes à T0, T1, T2, T3, T4, T5, T6 et T7 en régime permanent.

☒ Imprimer la figure 4.

Ж Choix du modèle pour la conduction thermique dans le cuivre

☒ Créer un nouveau fichier *Origin* dans lequel tracer la variation de la température réduite

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \text{ en fonction de l'abscisse } x \text{ du capteur } (x = 0, 0.12, \dots).$$

☒ Aller dans la rubrique *Analysis*, puis cliquer sur *Fit Exponential Decay* → *First Order*. Le logiciel va modéliser vos points expérimentaux sous forme d'une fonction exponentielle.

Conclure.

☒ Quelle fonction doit-on donc choisir pour décrire l'évolution temporelle de la température dans la barre de cuivre ?

Ж Calcul de H le coefficient d'échange thermique superficiel de l'échangeur

☒ Aller dans la rubrique *Analysis*, puis cliquer sur *Non-Linear Curve Fit* → *Advanced Fiting Tool*.

☒ Appuyer sur F(x) et choisir H comme *Parameter Name*.

☒ Rentrer la fonction qui décrit l'évolution temporelle de la température dans la barre de cuivre.

☒ Compiler votre fonction pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur.

☒ Cliquer sur Action → Fit.

☒ La modélisation trouvée par le logiciel, donne une valeur approximative de H.

☒ Imprimer la courbe de variation $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ en fonction de x avec le modèle trouvé.
