Les rationnels, les réels

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 I

Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

1. (**) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n-ième parfaite.
2. (**) $\log 2$.
3. (****) π (Lambert a montré en 1761 que π est irrationnel, Legendre a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, Lindemann a démontré en 1882 que π est transcendant).
   Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie
   (a) I_n est un entier relatif ;
   (b) $I_n > 0$;
   (c) $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (voir devoir).
4. (***) e (Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).
   Pour cela, établir que pour tout entier naturel n, $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel non nul n, $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.
5. (***) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{PGCD}(p,q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de Gauss : soient a, b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).
6. (***) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

Correction ▼ [005209]

Exercice 2 **IT

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf (A+B)$ existent et que l'on a $\sup (A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf (A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005210]

Exercice 3 **

Soit $A = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Correction ▼ [005211]

Exercice 4 **IT

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y)\in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Correction ▼ [005212]

Exercice 5 ***IT

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A\cap B)$, $\sup(A\cup B)$, $\sup(A+B)$ et $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

Correction ▼ [005213]

Exercice 6 ****

Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k, k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supèrieur ou égal à k. Montrer que le nombre $0,u_ku_{k+1}u_{k+2}\ldots$ est rationnel.

Correction ▼ [005214]

Exercice 7 ** Identité de CATALAN

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Correction ▼ [005215]

Exercice 8 **I Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI

Soient $a_1,\ldots,\ a_n,\ b_1,\ldots,\ b_n$ des nombres réels.

1. En considérant la fonction $f\ :\ x\mapsto\sum_{k=1}^n(a_k+xb_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^n a_kb_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).
2. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\sqrt{\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.
(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

Correction ▼ [005216]

Exercice 9 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1$.

Correction ▼ [005217]

Exercice 10 **** Sous groupes de $(\mathbb{R},+)$

1. Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R},+)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans $\mathbb{R}$.
Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R},+)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a = \text{Inf }(G\cap]0;+\infty[)$ puis envisager les deux cas $a=0$ et $a>0$.
(Definition : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $(\forall x\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G/\ |y-x|<\varepsilon)$.
2. Application 1. Montrer que $\{a+b\sqrt{2},\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).
   (a) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).
   (b) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005218]

Exercice 11 **

Montrer que $\{r^3,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005219]